

ВВЕДЕНИЕ

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **13 февраля 2023 г.** (I тур) и **14 февраля 2023 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временными регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2022–2023 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

- 11.1. Можно ли число 2023 представить в виде суммы трёх натуральных чисел a , b , c таких, что a делится на $b + c$ и $b + c$ делится на $b - c + 1$? (А. Кузнецов)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, такие три числа найдутся. Поскольку a кратно $b + c$, сумма $a + (b + c) = 2023$ также кратна $b + c$, из чего следует, что $b + c$ нечётно. Значит, $b - c + 1$ — чётное число, и нечётное число $b + c$ не может на него делиться.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

- 11.2. Даны различные вещественные числа a_1 , a_2 , a_3 и b . Оказалось, что уравнение $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = b$ имеет три различных вещественных корня c_1 , c_2 , c_3 . Найдите корни уравнения $(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) = b$. (А. Антропов, К. Сухов)

Ответ. $-a_1$, $-a_2$ и $-a_3$.

Первое решение. Так как многочлен $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - b$ имеет старший коэффициент 1 и корни c_1 , c_2 , c_3 , то $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - b = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$. Подставим $-x$ в последнее равенство вместо x , получим $(-x - a_1)(-x - a_2)(-x - a_3) - b = (-x - c_1)(-x - c_2)(-x - c_3)$, что равносильно $(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) + b = (x + c_1)(x + c_2)(x + c_3)$. Из полученного равенства получаем, что тремя корнями уравнения $b = (x + c_1)(x + c_2)(x + c_3)$ являются числа $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$.

Второе решение. По теореме Виета выполняются следующие соотношения:

$$c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1,$$

$$c_1c_2c_3 = a_1a_2a_3 - b.$$

Эти же равенства можно переписать следующим образом:

$$(-a_1) + (-a_2) + (-a_3) = (-c_1) + (-c_2) + (-c_3),$$

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1,$$

$$-a_1a_2a_3 = -c_1c_2c_3 - b,$$

из чего следует, что числа $-a_1$, $-a_2$ и $-a_3$ являются корнями уравнения $(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3) - b = 0$.

Замечание. Если в первое уравнение подставить вместо x

числа c_1 , c_2 и c_3 , то из полученных трёх равенств $(c_1 - a_1)(c_1 - a_2)(c_1 - a_3) = b$, $(c_2 - a_1)(c_2 - a_2)(c_2 - a_3) = b$ и $(c_3 - a_1)(c_3 - a_2)(c_3 - a_3) = b$ непосредственно не следует, например, что $(-a_1 + c_1)(-a_1 + c_2)(-a_1 + c_3) = b$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 1 балл.

Алгебраические преобразования, не приведшие к обоснованию ответа — баллы не добавляются.

- 11.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

(В. Дольников)

Решение. Предположим противное, и пусть в множестве всех школьников есть 30-элементные подмножества A_1, A_2, \dots, A_{50} (множества участников каждой олимпиады) такие, что пересечение любых 30 из них непусто, а пересечение всех — пусто.

Пусть среди множеств A_1, A_2, \dots, A_{50} нашлись два множества B и C , имеющие $k \leq 28$ общих элементов x_1, x_2, \dots, x_k . Для каждого элемента x_i среди множеств A_1, A_2, \dots, A_{50} найдём подмножество D_i , не содержащее x_i (такое подмножество D_i найдётся, иначе x_i — общий элемент множеств A_1, A_2, \dots, A_{50}). (Заметим, что среди подмножеств D_i могут быть совпадающие.) Тогда пересечение не более 30 подмножеств B, C, D_1, \dots, D_k — пусто. Это противоречит нашему предположению (к данным подмножествам можно добавить ещё несколько, чтобы стало 30 подмножеств, при таком добавлении пересечение остается пустым).

Значит, указанных двух множеств B и C не найдётся. Тогда пересечение любых двух из множеств A_1, A_2, \dots, A_{50} содержит в точности 29 элементов. Пусть $A_1 \cap A_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{29}\}$, так что $A_1 = \{z_1, y_1, y_2, \dots, y_{29}\}$, $A_2 = \{z_2, y_1, y_2, \dots, y_{29}\}$. Найдём подмножество (пусть, для определенности, это подмножество — A_3), не содержащее y_1 . Так как $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 29$, то A_3 обязано содержать все элементы $z_1, z_2, y_2, y_3, \dots, y_{29}$. Этих элементов 30 (все они различны),

поэтому $A_3 = \{z_1, z_2, y_2, y_3, \dots, y_{29}\}$. Рассмотрим любое подмножество A_i из подмножеств A_4, \dots, A_{50} . Предположим, что A_i содержит элемент, лежащий вне 31-элементного множества $K = \{z_1, z_2, y_1, y_2, \dots, y_{29}\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Тогда A_i должно пересекаться с каждым из подмножеств A_1, A_2, A_3 по одному и тому же 29-элементному подмножеству множества K . Но $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 28$, значит, такого 29-элементного подмножества не существует — противоречие. Отсюда делаем вывод, что все множества A_1, A_2, \dots, A_{50} являются подмножествами множества K . Но в множестве K количество 30-элементных подмножеств равно $31 < 50$. Получаем противоречие, завершающее решение задачи.

Комментарий. Задача сведена к случаю, когда пересечение любых двух из множеств содержит в точности 29 элементов (а этот случай не разобран) — 3 балла.

- 11.4. На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел $(1, 2)$. Если на доске написана пара чисел (a, b) , то на доску можно дописать пару $(-a, -b)$, а также пару $(-b, a + b)$. Кроме того, если на доске написаны пары чисел (a, b) и (c, d) , то на доску можно дописать пару $(a + c, b + d)$. Могла ли через некоторое время на доске оказаться пара $(2022, 2023)$? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел $(1, 2)$ и $(2, 1)$ считаются различными. (И. Почепцов)

Ответ. Не могла.

Первое решение. Докажем, что для любой пары (x, y) , записанной на доске, число $2x - y$ делится на 7.

Действительно, для пары $(1, 2)$ число $2 \cdot 1 - 1 = 0$ делится на 7.

Пусть для пары (a, b) число $2a - b$ делится на 7. Тогда для пары $(-a, -b)$ число $2 \cdot (-a) - (-b) = -(2a - b)$ делится на 7, и для пары $(-b, a + b)$ число $2 \cdot (-b) - (a + b) = -a - 3b = 3(2a - b) - 7a$ делится на 7.

Пусть для пар (a, b) , (c, d) числа $2a - b$, $2c - d$ делятся на 7. Тогда для пары $(a + c, b + d)$ число $2(a + c) - (b + d) = (2a - b) + (2c - d)$ делится на 7.

Так как для пары $(2022, 2023)$ число $2 \cdot 2022 - 2023 = 2021$ не делится на 7, эта пара на доске появиться не может.

Второе решение. Будем к каждой паре (a, b) на доске дописывать третье число $c = -a - b$. Тогда сумма чисел в каждой тройке будет равна нулю, а правила дописывания новых пар будут такими: если на доске записана тройка (a, b, c) , то можно дописать тройки $(-a, -b, -c)$ и $(-b, -c, -a)$, а если записаны тройки (a, b, c) и (d, e, f) , то можно дописать тройку $(a + d, b + e, c + f)$ — назовём эту тройку *суммой* троек (a, b, c) и (d, e, f) . Также для тройки (a, b, c) и целого числа k обозначим через $k \cdot (a, b, c)$ тройку (ka, kb, kc) .

Докажем, что все тройки, появляющиеся на доске, имеют вид

$$(a, b, c) = k \cdot (1, 2, -3) + \ell \cdot (2, -3, 1) + m \cdot (-3, 1, 2) \quad (*)$$

с целыми k, ℓ и m . В начальный момент времени это верно: $(1, 2, -3) = 1 \cdot (1, 2, -3) + 0 \cdot (2, -3, 1) + 0 \cdot (-3, 1, 2)$. Теперь достаточно показать, что из троек, имеющих вид $(*)$, также получаются лишь такие тройки. Для операции взятия суммы троек это очевидно. Для остальных операций это тоже несложно проверить: если (a, b, c) имеет вид $(*)$, то

$$\begin{aligned} (-a, -b, -c) &= (-k) \cdot (1, 2, -3) + (-\ell) \cdot (2, -3, 1) + (-m) \cdot (-3, 1, 2), \\ (-b, -c, -a) &= (-m) \cdot (1, 2, -3) + (-k) \cdot (2, -3, 1) + (-\ell) \cdot (-3, 1, 2). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Предположим теперь, что на доске появилась тройка $(2022, 2023, -4045)$, то есть она имеет вид $(*)$. Тогда имеем

$$2022 = k + 2\ell - 3m \quad \text{и} \quad 2023 = 2k - 3\ell + m.$$

Выражая из первого равенства $k = 2022 - 2\ell + 3m$ и подставляя во второе, получаем $2023 = 2 \cdot 2022 - 7\ell + 7m$, то есть $7(m - \ell) = 2023 - 2 \cdot 2022 = -2021$. Однако это невозможно, поскольку 2021 не делится на 7.

Замечание. Можно показать, что указанными операциями получаются *все* тройки, имеющие вид $(*)$. Также можно заметить, что $(-3, 1, 2) = -(1, 2, -3) - (2, -3, 1)$, так что в формуле $(*)$ можно обойтись без третьего слагаемого.

Аналогичное решение можно получить и без дописывания третьего числа к паре (однако оно будет выглядеть менее естественно). Именно, можно доказать, что все пары, появляющиеся

на доске в исходном процессе, имеют вид

$$(a, b) = k \cdot (1, 2) + \ell \cdot (2, -3) \quad (**)$$

с целыми k и ℓ . Заметим здесь, что если пара (a, b) имеет вид (**), то

$$(-b, a + b) = \ell \cdot (1, 2) + (\ell - k) \cdot (2, -3).$$

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Сформулировано утверждение о том, что все получающиеся пары имеют вид (**), — 1 балл.

Это утверждение доказано — ещё 3 балла.

Участник перешёл от пар чисел к тройкам (как во втором решении) — 1 балл.

После этого *замечено*, что все тройки представляются в виде (*) — ещё 3 балла.

После перехода от пар к тройкам утверждение о представимости в виде (*) принимается без доказательства.

- 11.5. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведена высота AH , медиана AM , а также отмечен центр O его описанной окружности ω . Отрезки OH и AM пересекаются в точке D , прямые AB и CD — в точке E , прямые BD и AC — в точке F . Лучи EH и FH пересекают окружность ω в точках X и Y . Докажите, что прямые BY , CX и AH пересекаются в одной точке. (А. Кузнецов)

Решение. Пусть P — такая точка на луче HE , что $PB \perp BC$ (см. рис. 7). Докажем, что точки C , O и P лежат на одной прямой.

В самом деле, по теореме Менелая для треугольника ADE и прямой CMB имеем $\frac{EC}{CD} \cdot \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AB}{BE} = 1$. Поскольку прямые PB , AH и OM параллельны между собой (так как они все перпендикулярны прямой BC), имеем $AB/BE = HP/PE$, а также $DM/MA = DO/OH$. Значит, $\frac{EC}{CD} \cdot \frac{DO}{OH} \cdot \frac{HP}{PE} = 1$, из чего следует, что точки C , O и P лежат на одной прямой по теореме Менелая для треугольника EDH . Значит, точка P диаметрально противоположна точке C в окружности ω . Аналогично, если Q — точка пересечения перпендикуляра к прямой BC , проходящего через точку C , и прямой HF , то точка Q диаметрально противо-

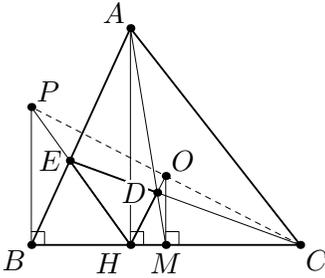


Рис. 7

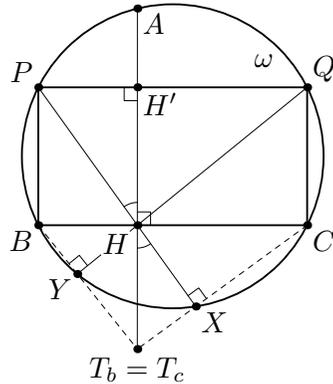


Рис. 8

положна точке B . Из этого следует, что $\angle EXC = \angle PXC = 90^\circ$, и, аналогично, $\angle FYB = \angle QYB = 90^\circ$.

Обозначим через H' , T_b и T_c точки пересечения прямой AH соответственно с прямыми PQ , BY и CX (см. рис. 8). Заметим, что треугольники HXT_c и $HH'P$ подобны как прямоугольные с вертикальными острыми углами. Значит, $HT_c/HX = HP/HH'$, или $HT_c = HX \cdot HP/HH' = HB \cdot HC/HH'$. Аналогично, $HT_b = HB \cdot HC/HH'$. Значит, прямые BY и CX пересекают прямую AH в одной и той же точке, что и требовалось доказать.

Комментарий. Отмечены точки, диаметрально противоположные точкам B и C на окружности ω — 0 баллов.

Отмечены вторые точки пересечения прямых XH и YH с ω — 0 баллов.

Утверждается, но не доказывается, что вторые точки пересечения прямых XH и YH с ω — это точки, диаметрально противоположные вершинам B и C — 1 балл. Если это утверждение доказано — 3 балла.

Задача сведена к доказательству факта совпадения указанных точек, но совпадение не доказано — 4 балла.

Баллы за указанные продвижения не суммируются.