

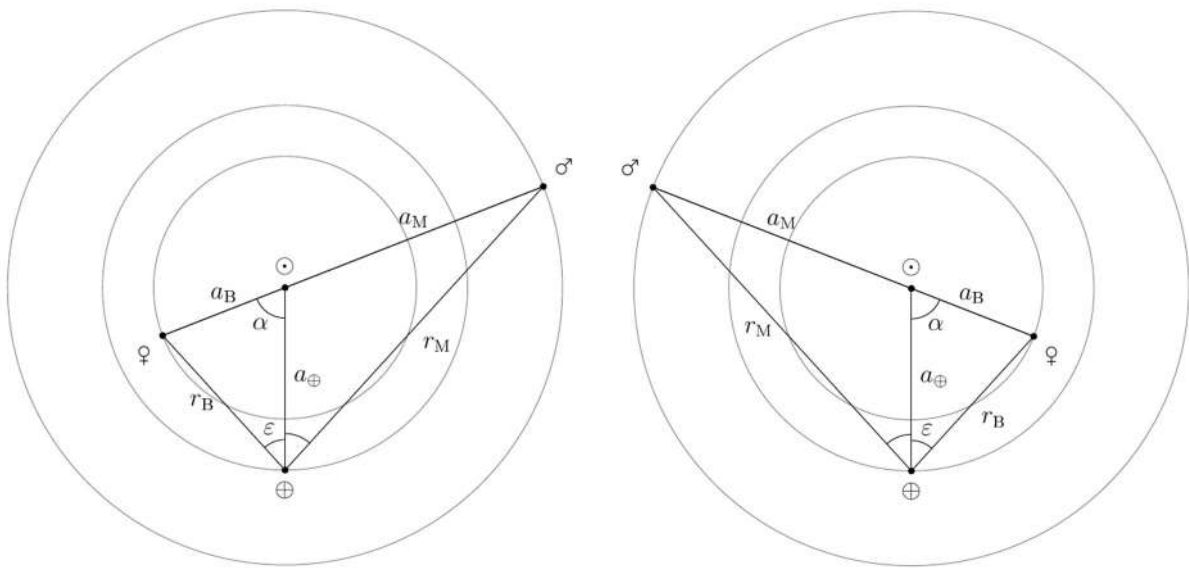
XXX Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Региональный этап. Задания и решения

11 класс

1. Условие. Земной наблюдатель видит, что угловое удаление Венеры и Марса от Солнца одинаково и больше нуля. В тот же момент на Марсе можно наблюдать верхнее соединение Венеры с Солнцем. Определите угловое удаление Венеры от Солнца для земного наблюдателя. Орбиты всех планет считать круговыми и лежащими в плоскости эклиптики. Определите минимально возможное время, за которое одна из планет окажется на одной линии с Солнцем для земного наблюдателя. Рассмотрите все возможные варианты и конфигурации. Сопроводите решение подробным чертежом.

1. Решение. Изобразим на рисунке положение планет.



Заметим, что отрезок Земля–Солнце – биссектриса треугольника. Свойство биссектрисы – делить противоположащую сторону в отношении длин прилежащих сторон. Это значит, что

$$\frac{r_B}{r_M} = \frac{a_B}{a_M} = \frac{0.72}{1.52}.$$

Запишем теорему косинусов для сторон Земля–Венера и Земля–Марс. Угол Земля–Солнце–Венера обозначим за α :

$$r_B^2 = a_B^2 + a_B^2 - 2a_B a_B \cos \alpha,$$

$$r_M^2 = a_B^2 + a_M^2 - 2a_B a_M \cos(180^\circ - \alpha) = a_B^2 + a_M^2 + 2a_B a_M \cos \alpha.$$

Здесь мы учли, что $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Поделим одно уравнение на другое:

$$\left(\frac{r_B}{r_M}\right)^2 = \left(\frac{a_B}{a_M}\right)^2 = \frac{a_B^2 + a_B^2 - 2a_B a_B \cos \alpha}{a_B^2 + a_M^2 + 2a_B a_M \cos \alpha}.$$

Нам неизвестна только одна величина – $\cos \alpha$. Решим уравнение относительно нее. Тогда

$$\cos \alpha = 0.366 \Rightarrow \alpha = 68.5^\circ.$$

По теореме косинусов находим сторону r_B :

$$r_B \approx 1 \text{ а. е.}$$

Теперь по теореме синусов легко находится угол Венера-Земля-Солнце:

$$\frac{r_B}{\sin \alpha} = \frac{a_B}{\sin \varepsilon} \Rightarrow \sin \varepsilon = \sin \alpha \frac{a_B}{r_B},$$

откуда $\varepsilon = 42^\circ$ – угловое удаление Венеры от Солнца.

Для того, чтобы правильно ответить на второй вопрос задачи, обратим внимание, что условию задачи удовлетворяют два варианта взаимного расположения планет. В одном Венера находится к востоку от Солнца, а Марс – к западу, а в другом – наоборот. Перейдем в такую систему отсчета, в которой и Солнце, и Земля неподвижны. В этой системе координат планеты будут совершать один оборот по своей орбите за синодический период, причем Венера будет двигаться против часовой стрелки, а Марс – по часовой.

К этому выводу легко прийти, воспользовавшись угловыми скоростями. Если T_\oplus и $T_{\text{планеты}}$ – сидерические периоды Земли и планеты, то разность угловых скоростей Земли и планеты составит их относительную угловую скорость:

$$\left| \frac{360^\circ}{T_\oplus} - \frac{360^\circ}{T_{\text{планеты}}} \right| = |\omega_\oplus - \omega_{\text{планеты}}| = \omega_{\text{отн}} = \frac{360^\circ}{S_{\text{планеты}}}.$$

Здесь относительной угловой скорости поставлено в соответствие время S , которое и является синодическим периодом. Направление движения планеты определяется знаком выражения под модулем. Величины синодических периодов для Венеры и Марса равны 584 и 780 суток соответственно.

Рассмотрим вариант, изображенный на левом рисунке. Венере до нижнего соединения остается пройти угол α , тогда как Марсу до противостояния нужно пройти угол $180^\circ - \alpha$. Синодический период Марса больше и больше путь, который ему надо пройти, поэтому, очевидно, что время до соединения Венеры пройдет меньше:

$$t_{1, \text{В}} = \alpha \cdot \frac{S_{\text{В}}}{360^\circ} \approx 111 \text{сут}, \quad t_{1, \text{М}} = (180^\circ - \alpha) \cdot \frac{S_{\text{М}}}{360^\circ} \approx 242 \text{сут}.$$

Теперь обратимся к правому рисунку. В этом варианте Марсу остается пройти угол α до соединения, тогда как Венере потребуется пройти угол $180^\circ - \alpha$, отделяющий ее от верхнего соединения. Для этого им потребуется

$$t_{2, \text{В}} = (180^\circ - \alpha) \cdot \frac{S_{\text{В}}}{360^\circ} \approx 181 \text{сут}, \quad t_{2, \text{М}} = \alpha \cdot \frac{S_{\text{М}}}{360^\circ} \approx 148 \text{сут}.$$

В этом случае уже Марс оказывается быстрее на одной линии с Солнцем, однако искомое минимальное время получается именно в первом варианте: 111 суток.

1. Система оценивания.

Этап 1. (3 балла): Определение взаимного расположения планет и определение углового удаления Венеры от Солнца. 1 балл ставится за рисунок/схему или подробное описание конфигурации. Для этого этапа достаточно рассмотреть один из двух вариантов расположения планет. Оставшиеся 2 балла в этом пункте ставятся за верное нахождение величины углового удаления Венеры от Солнца. Принимаемая точность – 1 градус.

Возможная ошибка. Участник сразу предполагает, что Венера находится в максимальной элонгации. В этом случае, данный этап оценивается в 0 баллов. Второй этап оценивается

независимо от первого и, если согласно модели участника, он решен верно, оценивается из стоимости второго этапа.

Возможная ошибка. Участник не увидел в условии, что Венера находится в верхнем соединении для наблюдателя на Марсе или перепутал верхнее и нижнее соединение. В этом случае участник начинает решать полностью свою задачу, и такое решение (все этапы) оценивается 0 баллов.

Этап 2. (5 баллов): Определение времен, когда каждая из планет окажется на линии Солнце-Земля и вывод о том, что Венера может сделать это раньше. По одному баллу выставляется за верное определение времени до соединения планеты с Солнцем. Участник может не считать время до противостояния Марса, но тогда должен явно сделать вывод, что оно больше, чем время до нижнего соединения Венеры. Последний балл выставляется за верный вывод о том, из всех возможных вариантов наименьшее время 111 дней затратит Венера.

Возможная ошибка. Участник рассматривает только один из двух вариантов расположения планет. При правильном решении он получает за второй этап 2 балла за определение времен до соединения: по 1 баллу за каждую планету.

Возможная ошибка. Использование сидерического периода планеты, вместо синодического периода. В этом случае весь этап оценивается 0 баллами.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. Условие. Повторная новая RS Змееносца в 2021 году наблюдалась во всех спектральных диапазонах, в том числе и в гамма-диапазоне. В первые 2 дня поток фотонов от новой составлял $2.4 \cdot 10^{-6}$ фотонов \cdot с $^{-1}$ \cdot см $^{-2}$ для фотонов с энергией 100 МэВ. Определите светимость от повторной новой для фотонов с такой энергией, если расстояние до объекта 1.6 кпк. Определите светимость в оптическом диапазоне, если в максимуме блеска видимая звездная величина составляла 4.8^m. Сравните со светимостью на 100 МэВ. Межзвездным поглощением и поглощением в атмосфере Земли пренебречь. Поток солнечной энергии на Земле в видимом диапазоне равен 600 Вт/м 2 . Абсолютная звездная величина Солнца в видимом диапазоне равна 4.79^m.

3. Решение. Для начала определим поток энергии F в гамма-диапазоне. Каждый фотон несет энергию 100 МэВ. МэВ – это миллион электрон-вольт. Из названия этой единицы измерения энергии понятно, что это работа необходимая для перемещение элементарного заряда в потенциале 1 вольт, то есть $1 \text{ эВ} = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Дж. Тогда поток энергии в гамма-диапазоне от повторной новой будет равен

$$F = 2.4 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2} = 3.84 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}.$$

Найдем светимость в гамма-диапазоне:

$$L_{\gamma} = F \cdot 4\pi r_0^2 = 3.84 \cdot 10^{-17} \cdot 4\pi(1600 \cdot 3.1 \cdot 10^{18})^2 = 1.2 \cdot 10^{28} \text{ Вт}.$$

Следующим шагом определим оптическую светимость. Выразим абсолютную звездную величину в оптическом диапазоне:

$$M = m + 5 - 5\lg r_0 = 4.8^m + 5 - 5\lg 1600 = -6.22^m.$$

Сравнивая полученную абсолютную звездную величину с Солнцем:

$$\frac{L_{\text{opt}}}{L_{\odot}} = 10^{-0.4(M-M_{\odot})}.$$

Важным моментом решения является определение оптической светимости Солнца. В справочных данных дана светимость $3.88 \cdot 10^{26}$ Вт, но это болометрическая светимость, то есть излучаемая во всем электромагнитном диапазоне энергия. Нам же для сравнения нужна светимость Солнца именно в оптическом диапазоне. Обратим внимание, что в условии задачи дан поток солнечной энергии в видимом диапазоне. В справочных данных есть солнечная постоянная (1360 Вт / м²), т. е. поток всей солнечной энергии через единичную площадку на орбите Земли. Отношение этих потоков дает нам долю энергии в спектре Солнца, которая приходится на оптический диапазон. Подставим значения и получим светимость от повторной новой для оптического диапазона.

$$L = 10^{-0.4(-6.22-4.79)} \cdot 3.88 \cdot 10^{26} \frac{600}{1360} = 4.3 \cdot 10^{30} \text{Вт}.$$

Светимость в оптическом диапазоне оказалась более чем в 300 раз выше, чем на 100 МэВ.

3. Система оценивания.

Этап 1. (2 балла): Определение потока энергии в гамма-диапазоне от повторной новой RS Змееносца. Переход от внесистемных единиц измерения энергии к джоулям.

Этап 2. (2 балла): Определение гамма-светимости новой. Переход от потока энергии на Земле к светимости. Данный пункт оценивается в 2 балла.

Этап 3. (3 балла): Определение оптической светимости повторной новой. Данный этап разбивается на определение абсолютной звездной величины звезды по известной видимой и расстоянию до нее. Оценивается в 1 балл. Определение оптической светимости Солнца в явном виде или в виде отношения потоков оценивается в 1 балл. Определение оптической светимости новой, что оценивается в 1 балл.

Для определения светимости Солнца в оптическом диапазоне участник может взять интеграл от функции Планка в пределах видимого диапазона, от 360 нм до 740 нм. Если это сделано правильно, то оценивается в полной мере.

Этап 4. (1 балл): Вывод о том, в каком диапазоне светимость больше. Балл выставляется только при правильном вычислении обеих светимостей.

Возможная ошибка. Участник берет всю светимость Солнца и утверждает, что она вся оптическая. В этом случае за 3 этап участник получает только 1 балл.

Возможная ошибка. Участник неверно ищет долю оптической светимости Солнца. Скорее всего это происходит из-за невнимательного чтения условия. Этап 3 такого решения оценивается в 2 балла. Ниже примеры таких ошибок.

Вариант 1. Поток энергии в оптическом диапазоне составляет $600 / 1360 = 0.44$ светимости Солнца, а значит абсолютная звездная в видимом диапазоне равна $M_{B1} = M - 2.5 \lg 0.44 = 5.6^m$.

Вариант 2. Болометрическая поправка для звезд класса G2 составляет -0.07 . Отсюда, светимость Солнца в оптическом диапазоне составляет $10^{-0.4 \cdot 0.07} \approx 0.94$ полной светимости Солнца. Это неверно, так как не учтена разница «нуль-пунктов» визуальной и болометрической шкал звездных величин.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

4. Условие. В далекой звездной системе по круговой орбите вокруг звезды главной последовательности массой $1.5 M_{\odot}$ обращается планета – копия Земли по размерам. Сходство дополняется тем, что планета получает от звезды ровно столько же энергии, сколько Земля получает от Солнца. Вокруг планеты обращается спутник–копия Луны по размерам, только наклон орбиты спутника равен 0° , а период обращения составляет 50 земных суток. Определите период смены фаз спутника для наблюдателя на планете.

4. Решение. Для определения периода смены фаз спутника нам нужно определить период обращения планеты вокруг звезды, а для этого требуется знать радиус орбиты r планеты. Эту величину мы найдем из равенства освещенностей, создаваемых звездой на планете и Солнцем на Земле:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2}$$

Для звезд главной последовательности с массами близ солнечной справедлива пропорциональность $L \sim M^4$, отсюда

$$\frac{M^4}{4\pi r^2} = \frac{M_{\odot}^4}{4\pi a_{\oplus}^2}, \quad r = a_{\oplus} \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^2 = 2.25 \text{ а.е.}$$

По третьему закону Кеплера

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

В системе единиц «год – а. е. – масса Солнца»

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{1}{M}$$

Отсюда

$$T = \sqrt{\frac{r^3}{M}} = \sqrt{\frac{2.25^3}{1.5}} = 2.76 \text{ г.}$$

Спутник обращается в той же плоскости, что и планета, с периодом $T_s = 50$ суток. Наклон орбиты равен нулю, это означает, что спутник и планета движутся по орбитам в одном направлении. Период смены фаз – синодический период S спутника – связан с относительным движением спутника и планеты:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_s} - \frac{1}{T}, \quad S = \frac{TT_s}{T - T_s} = \frac{2.76 \cdot 365.25 \cdot 50}{2.76 \cdot 365.25 - 50} = 52.6 \text{ сут.}$$

4. Система оценивания.

Этап 1. (4 балла): запись условия о равенстве освещенностей (1 балл), применение соотношения «масса–светимость» (2 балла), получение радиуса орбиты планеты в а. е. или других подходящих по размерности единицах (1 балл). Показатель степени в соотношении может быть принят равным любой величине в диапазоне от 3 до 4. Отличия ответов в последующих пунктах, связанные с выбранным показателем, не являются ошибкой. Так, при показателе степени 3 значение радиуса орбиты будет равно 1.8 а. е., период обращения – 2 года, синодический период составит около 53.7 сут.

Этап 2. (2 балла): запись третьего закона Кеплера (1 балл) и определение периода обращения планеты в годах или других подходящих по размерности единицах (1 балл). Переход к системе «год – а. е. – масса Солнца» необязателен.

Этап 3. (2 балла): запись соотношения для синодического и сидерического периодов (1 балл), получение синодического периода в сутках или других подходящих по размерности единицах (1 балл). Использование величины тропического года Земли вместо звездного года дает незначительное изменение и ошибкой не считается.

Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

5. См. задание 5 для 10 класса

6. См. задание 6 для 10 класса