Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике для 10 класса, 2021/22 учебный год.
Максимальное количество баллов — 8.

Критерии оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл за каждое задание.

1-0. *На доске написано число 111123445678, необходимо вычеркнуть несколько цифр (не все), чтобы получилось число кратное 5. Сколькими способами можно это сделать?*

Ответ: 60

Решение. Цифры 6, 7 и 8 необходимо вычеркнуть, а 5 оставить (иначе число не будет делиться на 5). Каждую цифру перед пятёркой можно вычёркивать или не вычёркивать. На цифры 2 и 3 есть по два варианта на каждую (вычеркнуть или нет), на 4 — 3 варианта (не вычёркивать ни одной, вычеркнуть одну или вычеркнуть обе), а сделать что-то с единицами можно пятью вариантами (не вычеркнуть ни одной, вычеркнуть одну, две, три или все четыре). Вычёркивания разных цифр — независимые события, поэтому полученные числа надо перемножить: $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$.

1-1. *На доске написано число 11122345678, необходимо вычеркнуть несколько цифр (не все), чтобы получилось число кратное 5. Сколькими способами можно это сделать?*

Ответ: 48

1-2. *На доске написано число 111133345678, необходимо вычеркнуть несколько цифр (не все), чтобы получилось число кратное 5. Сколькими способами можно это сделать?*

Ответ: 40

1-3. *На доске написано число 11233345678, необходимо вычеркнуть несколько цифр (не все), чтобы получилось число кратное 5. Сколькими способами можно это сделать?*

Ответ: 48

1-4. *На доске написано число 122344445678, необходимо вычеркнуть несколько цифр (не все), чтобы получилось число кратное 5. Сколькими способами можно это сделать?*

Ответ: 60

1-5. *На доске написано число 2234445678, необходимо вычеркнуть несколько цифр (не все), чтобы получилось число кратное 5. Сколькими способами можно это сделать?*

Ответ: 48

2-0. *Число n таково, что $8n$ является 100-значным числом, а $81n$ — 102-значным. Чему может быть равна вторая с начала цифра n?*

Ответ: 2

Решение. Так как $8n < 10^{100}$, то $n < 125 \cdot 10^{97}$. Но $81n > 10^{101}$ (равенство тут, очевидно, невозможно), значит $n > 123 \cdot 10^{97}$. Отсюда вторая с начала цифра числа n равна 2.

2-1. *Число n таково, что $7n$ является 50-значным числом, а $71n$ — 52-значным. Чему может быть равна вторая с начала цифра n?*

Ответ: 4

2-2. *Число n таково, что $6n$ является 70-значным числом, а $61n$ — 72-значным. Чему может быть равна вторая с начала цифра n?*

Ответ: 6

2-3. *Число n таково, что $5n$ является 90-значным числом, а $51n$ — 92-значным. Чему может быть равна вторая с начала цифра n?*

Ответ: 9

2-4. *Число n таково, что $8n$ является 65-значным числом, а $81n$ — 67-значным. Чему может быть равна вторая с начала цифра n?*

Ответ: 2

2-5. *Число n таково, что $6n$ является 75-значным числом, а $61n$ — 77-значным. Чему может быть равна вторая с начала цифра n?*

Ответ: 6

3-0. *В равнобедренном треугольнике основание в 2 раза больше диаметра вписанной окружности. Найдите синус большего угла треугольника.*

Ответ: 0,96

Решение. Пусть AC — основание данного треугольника, B — его вершина, I — центр вписанной окружности, H — середина стороны AC, r — радиус вписанной окружности, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Из условия $AH = 2r$. В треугольнике AIH $AI = \sqrt{r^2 + (2r)^2} = r\sqrt{5}$. Отсюда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда $\sin\alpha = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$. Из равнобедренности треугольника ABC имеем $\frac{\beta}{2} = 90° - \alpha$, и тогда $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{4}{5}$, $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{3}{5}$, и тогда $\sin\beta = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$. Очевидно, β и есть наибольший угол (потому что $\cos\alpha = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$, и следовательно, $\alpha < 60°$).

3-1. *В равнобедренном треугольнике основание в 2 раза больше диаметра вписанной окружности. Найдите косинус большего угла треугольника.*

Ответ: 0,28

3-2. *В равнобедренном треугольнике основание в 3 раза больше диаметра вписанной окружности. Найдите косинус большего угла треугольника.*

Ответ: -0,28

3-3. *В равнобедренном треугольнике основание в 3 раза больше диаметра вписанной окружности. Найдите синус большего угла треугольника.*

Ответ: 0,96

3-4. *В равнобедренном треугольнике основание в 1,5 раза больше диаметра вписанной окружности. Найдите косинус большего угла треугольника.*

Ответ: 5/13

3-5. *В равнобедренном треугольнике основание в 1,5 раза больше диаметра вписанной окружности. Найдите синус большего угла треугольника.*

Ответ: 12/13

4-0. *Кися и Буся пришли на перемене в буфет, где продавались только коржики и плюшки, стоившие целое число рублей. Кися купил 8 коржиков и 3 плюшки, потратив менее 200 рублей, а Буся — 4 коржика и 5 плюшек, потратив больше 150 рублей. Назовите самую большую возможную цену одного коржика.*

Ответ: 19

Решение. Пусть коржик стоит k, а плюшка p рублей. Тогда $8k+3p<200$, $4k+5p>150$. Умножив первое неравенство на 5, а второе на 3, получим $40k+15p<1000$, $-12k-15p<-450$. Сложим эти неравенства: $28k<550$, откуда с учётом целочисленности $k\leqslant 19$.

Заметим, что случай $k=19$, $p=15$ удовлетворяет всем условиям.

4-1. *Кися и Буся пришли на перемене в буфет, где продавались только коржики и плюшки, стоившие целое число рублей. Кися купил 6 коржиков и 5 плюшек, потратив менее 400 рублей, а Буся — 2 коржика и 3 плюшки, потратив больше 200 рублей. Назовите самую большую возможную цену одного коржика.*

Ответ: 24

4-2. *Кися и Буся пришли на перемене в буфет, где продавались только коржики и плюшки, стоившие целое число рублей. Кися купил 10 коржиков и 4 плюшки, потратив менее 250 рублей, а Буся — 3 коржика и 5 плюшек, потратив больше 200 рублей. Назовите самую большую возможную цену одного коржика.*

Ответ: 11

4-3. *Кися и Буся пришли на перемене в буфет, где продавались только коржики и плюшки, стоившие целое число рублей. Кися купил 8 коржиков и 5 плюшек, потратив менее 300 рублей, а Буся — 3 коржика и 4 плюшки, потратив больше 200 рублей. Назовите самую большую возможную цену одного коржика.*

Ответ: 11

4-4. *Кися и Буся пришли на перемене в буфет, где продавались только коржики и плюшки, стоившие целое число рублей. Кися купил 8 коржиков и 5 плюшек, потратив менее 250 рублей, а Буся — 2 коржика и 3 плюшки, потратив больше 100 рублей. Назовите самую большую возможную цену одного коржика.*

Ответ: 17

4-5. *Кися и Буся пришли на перемене в буфет, где продавались только коржики и плюшки, стоившие целое число рублей. Кися купил 7 коржиков и 3 плюшки, потратив менее 250 рублей, а Буся — 3 коржика и 4 плюшки, потратив больше 200 рублей. Назовите самую большую возможную цену одного коржика.*

Ответ: 20

5-0. *Некоторый квадратный трёхчлен* $x^2 - px + q$ *имеет целые корни* x_1 *и* x_2*. Оказалось, что числа* x_1*,* x_2 *и* q *образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите сумму возможных значений* x_2*.*

Ответ: -5

Решение. По теореме Виета $q = x_1x_2$. Тогда $2x_2 = x_1 + x_1x_2$, откуда $x_1 = \frac{2x_2}{1+x_2}$. Так как корни целые, то $2x_2$ делится на $1+x_2$. Но $2+2x_2$ делится на $1+x_2$, а значит, 2 тоже делится на $1+x_2$. Тогда $x_2 = -3,\ -2,\ 0$ или 1. В этих случаях x_1 принимает значения 3, 4, 0 и 1. Поскольку $x_2 < x_1$, подходят лишь первые два варианта, откуда сумма возможных значений x_2 равна -5.

5-1. *Некоторый квадратный трёхчлен* $x^2 - px + q$ *имеет целые корни* x_1 *и* x_2*. Оказалось, что числа* x_1*,* x_2 *и* q *образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите сумму возможных значений* x_1*.*

Ответ: 7

5-2. *Некоторый квадратный трёхчлен* $x^2 - px + q$ *имеет целые корни* x_1 *и* x_2*. Оказалось, что числа* x_1*,* x_2 *и* q *образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите сумму возможных значений* q*.*

Ответ: -17

5-3. *Некоторый квадратный трёхчлен* $x^2 - px + q$ *имеет целые корни* x_1 *и* x_2*. Оказалось, что числа* x_1*,* x_2 *и* q *образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите произведение возможных значений* x_2*.*

Ответ: 6

5-4. *Некоторый квадратный трёхчлен* $x^2 - px + q$ *имеет целые корни* x_1 *и* x_2*. Оказалось, что числа* x_1*,* x_2 *и* q *образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите произведение возможных значений* x_1*.*

Ответ: 12

5-5. *Некоторый квадратный трёхчлен* $x^2 - px + q$ *имеет целые корни* x_1 *и* x_2*. Оказалось, что числа* x_1*,* x_2 *и* q *образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите произведение возможных значений* q*.*

Ответ: 72

6-0. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем площади треугольников ABC и ACD равны. Три стороны четырехугольника равны 5, 8 и 10. Найдите все возможные значения длины четвертой стороны.*

Ответ: 4; 6,25; 16

Решение. Так как четырехугольник вписан в окружность, его противолежащие углы B и D в сумме дают $180°$. Значит, их синусы равны. А тогда из равенства площадей треугольников ABC и ACD следует, что $AB \cdot BC = AD \cdot CD$, что дает три возможных варианта, так как значения трех известных сторон расставляются тремя способами.

6-1. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем площади треугольников ABC и ACD равны. Три стороны четырехугольника равны 6, 10 и 12. Найдите все возможные значения длины четвертой стороны.*

Ответ: 5; 7,2; 20

6-2. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем площади треугольников ABC и ACD равны. Три стороны четырехугольника равны 4, 6 и 8. Найдите все возможные значения длины четвертой стороны.*

Ответ: 3; 16/3; 12

6-3. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем площади треугольников ABC и ACD равны. Три стороны четырехугольника равны 5, 6 и 12. Найдите все возможные значения длины четвертой стороны.*

Ответ: 2,5; 10; 14,4

6-4. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем площади треугольников ABC и ACD равны. Три стороны четырехугольника равны 4, 8 и 10. Найдите все возможные значения длины четвертой стороны.*

Ответ: 3,2; 5; 20

6-5. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем площади треугольников ABC и ACD равны. Три стороны четырехугольника равны 4, 5 и 10. Найдите все возможные значения длины четвертой стороны.*

Ответ: 2; 8; 12,5

7-0. *Число n имеет ровно шесть делителей (включая 1 и себя). Их расположили в порядке возрастания. Оказалось, что третий делитель в семь раз больше второго, а четвёртый на 10 больше третьего. Чему равно n?*

Ответ: 2891

Решение. Если n имеет шесть делителей, то либо $n = p^5$, либо $n = p \cdot q^2$ (где p и q — простые числа). В первом случае $p = 7$ (т.к. третий делитель в семь раз больше второго), но тогда не выполняется второе условие.

Итак, n имеет два простых делителя (один из которых входит во второй степени), причём один из простых множителей равен 7. Пусть наименьшие делители n — 1, p, $7p$ и $7p + 10$. Если $p = 7$, то $7p + 10 = 59$, и мы получаем ответ 2891. Если $p < 7$, то $p = 2$ (тогда $7p + 10 = 24$, а у такого числа более шести делителей). Если $p = 3$, то $7p + 10 = 31$, а если $p = 5$, то $7p + 10 = 45$. В каждом из этих случаев n имеет более двух простых делителей.

7-1. *Число n имеет ровно шесть делителей (включая 1 и себя). Их расположили в порядке возрастания. Оказалось, что третий делитель в пять раз больше второго, а четвёртый на 12 больше третьего. Чему равно n?*

Ответ: 925

7-2. *Число n имеет ровно шесть делителей (включая 1 и себя). Их расположили в порядке возрастания. Оказалось, что третий делитель в семь раз больше второго, а четвёртый на 12 больше третьего. Чему равно n?*

Ответ: 2989

7-3. *Число n имеет ровно шесть делителей (включая 1 и себя). Их расположили в порядке возрастания. Оказалось, что третий делитель в пять раз больше второго, а четвёртый на 16 больше третьего. Чему равно n?*

Ответ: 1025

7-4. *Число n имеет ровно шесть делителей (включая 1 и себя). Их расположили в порядке возрастания. Оказалось, что третий делитель в 11 раз больше второго, а четвёртый на 10 больше третьего. Чему равно n?*

Ответ: 15851

7-5. *Число n имеет ровно шесть делителей (включая 1 и себя). Их расположили в порядке возрастания. Оказалось, что третий делитель в 11 раз больше второго, а четвёртый на 6 больше третьего. Чему равно n?*

Ответ: 15367

8-0. *Однажды царь Шахрияр сказал Шахерезаде: «Вот тебе бумажный круг, на границе которого 1001 точка. Один раз в каждую ночь ты должна резать имеющуюся у тебя фигуру по прямой, содержащей любые две отмеченные точки, оставляя себе лишь один фрагмент, а второй выбрасывай. И ты следи, чтобы у тебя оставался не многоугольник, но такая фигура, из которой многоугольник, разрезая дальше, можно получить». В какую по счёту ночь Шахерезада при самых искусных своих действиях уже не сможет выполнить условие Шахрияра?*

Ответ: 1999

Решение. Сперва опишем стратегию, как будет действовать Шахерезада, чтобы выполнялись условия Шахрияра в течение 1998 ночей. Сначала она будет резать по линиям, соединяющим соседние вершины, и отбрасывать меньшую часть (назовём такую часть сегментом). Так она будет резать 1000 ночей. После этого останется 1001-угольник с приставленным к одной из сторон сегментом. После этого она будет отрезать треугольники. После каждого такого отрезания количество углов уменьшается на 1 (и по-прежнему к одной из сторон приложен сектор), и ещё через 998 ходов останется треугольник с сектором, после чего резать по правилам будет нечего.

Аналогично доказывается, что стратегии на большее количество шагов у Шахерезады нет. За каждый ход Шахерезада выбрасывает либо сектор, либо вершину (возможно, и то, и другое). В конце концов должен остаться сектор и хотя бы три вершины, а значит, более 1998 раз разрезать нельзя.

8-1. *Однажды царь Шахрияр сказал Шахерезаде: «Вот тебе бумажный круг, на границе которого 1002 точки. Один раз в каждую ночь ты должна резать имеющуюся у тебя фигуру по прямой, содержащей любые две отмеченные точки, оставляя себе лишь один фрагмент, а второй выбрасывай. И ты следи, чтобы у тебя оставался не многоугольник, но такая фигура, из которой многоугольник, разрезая дальше, можно получить». В какую по счёту ночь Шахерезада при самых искусных своих действиях уже не сможет выполнить условие Шахрияра?*

Ответ: 2001

8-2. *Однажды царь Шахрияр сказал Шахерезаде: «Вот тебе бумажный круг, на границе которого 501 точка. Один раз в каждую ночь ты должна резать имеющуюся у тебя фигуру по прямой, содержащей любые две отмеченные точки, оставляя себе лишь один фрагмент, а второй выбрасывай. И ты следи, чтобы у тебя оставался не многоугольник, но такая фигура, из которой многоугольник, разрезая дальше, можно получить». В какую по счёту ночь Шахерезада при самых искусных своих действиях уже не сможет выполнить условие Шахрияра?*

Ответ: 999

8-3. *Однажды царь Шахрияр сказал Шахерезаде: «Вот тебе бумажный круг, на границе которого 502 точки. Один раз в каждую ночь ты должна резать имеющуюся у тебя фигуру по прямой, содержащей любые две отмеченные точки, оставляя себе лишь один фрагмент, а второй выбрасывай. И ты следи, чтобы у тебя оставался не многоугольник, но такая фигура, из которой многоугольник, разрезая дальше, можно получить». В какую по счёту ночь Шахерезада при самых искусных своих действиях уже не сможет выполнить условие Шахрияра?*

Ответ: 1001

8-4. *Однажды царь Шахрияр сказал Шахерезаде: «Вот тебе бумажный круг, на границе которого 1000 точек. Один раз в каждую ночь ты должна резать имеющуюся у тебя фигуру по прямой, содержащей любые две отмеченные точки, оставляя себе лишь один фрагмент, а второй выбрасывай. И ты следи, чтобы у тебя оставался не многоугольник, но такая фигура, из которой многоугольник, разрезая дальше, можно получить». В какую по счёту ночь Шахерезада при самых искусных своих действиях уже не сможет выполнить условие Шахрияра?*

Ответ: 1997

8-5. *Однажды царь Шахрияр сказал Шахерезаде: «Вот тебе бумажный круг, на границе которого 965 точек. Один раз в каждую ночь ты должна резать имеющуюся у тебя фигуру по прямой, содержащей любые две отмеченные точки, оставляя себе лишь один фрагмент, а второй выбрасывай. И ты следи, чтобы у тебя оставался не многоугольник, но такая фигура, из которой многоугольник, разрезая дальше, можно получить». В какую по счёту ночь Шахерезада при самых искусных своих действиях уже не сможет выполнить условие Шахрияра?*

Ответ: 1927