8 класс

Задача 8.1. В ящике лежат апельсины, груши и яблоки, всего 60 фруктов. Известно, что яблок в 3 раза больше, чем не яблок, а груш в 5 раз меньше, чем не груш. Сколько апельсинов лежит в ящике?

Ответ: 5.

Решение. Поскольку яблок в 3 раза больше, чем не яблок, то яблоки составляют $\frac{3}{4}$ от общего количества фруктов, т. е. их $\frac{3}{4} \cdot 60 = 45$. Поскольку груш в 5 раз меньше, чем не груш, то груши составляют $\frac{1}{6}$ от общего количества фруктов, т. е. их $\frac{1}{6} \cdot 60 = 10$. Тогда апельсинов всего $60 - 45 - 10 = 5$. $\square$

Задача 8.2. Олег купил шоколадку за n рублей, а через некоторое время продал её за 96 рублей. Оказалось, что он продал шоколадку ровно на $n\%$ дороже, чем покупал. За сколько рублей Олег купил шоколадку?

Ответ: 60.

Решение. Из условия задачи следует, что $96 = n \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)$. Преобразуя это уравнение, получаем

$$0 = n^2 + 100n - 9600 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (n + 160)(n - 60).$$

Значит, $n = 60$, ведь шоколадка не может стоить отрицательное число рублей. $\square$

Задача 8.3. У Маши есть три одинаковых игральных кубика, на гранях каждого из них написано шесть различных простых чисел с суммой 87.

Маша дважды кинула все три кубика. В первый раз сумма выпавших чисел равнялась 10, во второй раз сумма выпавших равнялась 62.

Ровно одно из шести чисел ни разу не выпало. Какое?

Ответ: 17.

Решение. Заметим, что число 10 единственным образом представляется в виде суммы трёх простых чисел: $10 = 2 + 3 + 5$. Это означает, что на кубиках есть числа 2, 3, 5, и они выпали в первый раз.

Заметим, что если чётное число 62 представимо в виде суммы трёх простых чисел, то одно из них чётно и поэтому равно 2. Тогда сумма двух оставшихся равна 60. Заметим, что среди этих двух чисел не может быть ни числа 2, ни числа 3, ни числа 5, а также что они различны (ведь числа 58, 57, 55 и 30 — составные). Это означает, что на кубиках есть два различных простых числа с суммой 60, больших 5, и они выпали во второй раз (вместе с 2).

Итак, на каждом кубике есть числа 2, 3, 5, а также два других простых числа с суммой 60. Поскольку сумма всех шести чисел равна 87, то шестое число, которое никогда не выпадало, равно $87 - 2 - 3 - 5 - 60 = 17$. □

Задача 8.4. В клетках таблицы 2×35 (2 строки, 35 столбцов) расставлены ненулевые действительные числа, причём в верхней строке все числа различны. Для любых двух чисел, стоящих в одном столбце, выполнено следующее условие: одно число является квадратом другого.
(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть в этой таблице?
(б) *(3 балла)* Какое наименьшее количество различных чисел может быть в нижней строке?

Ответ: **(а)** 35. **(б)** 12.

Решение. **(а)** В любом столбце может быть не более одного отрицательного числа, поэтому всего отрицательных чисел не больше 35. Их может быть ровно 35, если, например, сверху стоят числа $-1, -2, -3, \ldots, -35$, а под ними — числа $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 35^2$ соответственно.

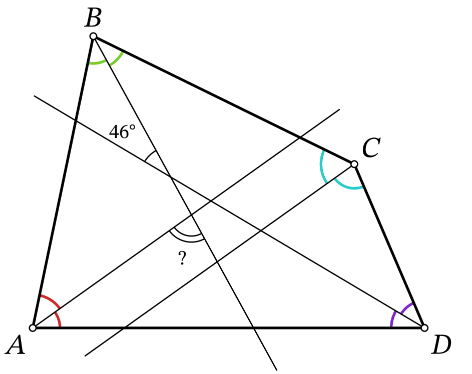
(б) Докажем, что каждое из чисел в нижней строке встречается не более 3 раз.

- Пусть в нижней строке встретилось число $a < 0$. Тогда оно не может быть чьим-то квадратом, и над ним написано число a^2. Поскольку в верхней строке все числа различны, то число a в нижней строке встречается не более 1 раза.
- Пусть в нижней строке встретилось число $a > 0$. Если в столбце с числом a верхнее число является квадратом нижнего, то над ним написано число a^2. Если же нижнее число является квадратом верхнего, то над ним написано $-\sqrt{a}$ или $\sqrt{a}$. Поскольку в верхней строке все числа различны, то число a в нижней строке встречается не более 3 раз.

Поскольку каждое из чисел в нижней строке встречается не более 3 раз, а чисел там всего 35, то среди них различных не меньше $\frac{35}{3} > 11$, т. е. их не меньше 12.

Осталось привести пример того, как в нижней строке может оказаться ровно 12 различных чисел. Рассмотрим 12 наименьших простых чисел: $2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_{12}$. Пусть в первых трёх столбцах снизу везде написано число p_1^2, а сверху написаны числа $-p_1$, p_1 и p_1^4. Аналогично в следующих трёх столбцах снизу везде написано число p_2^2, а сверху написаны числа $-p_2$, p_2 и p_2^4 и так далее. В последних двух столбцах снизу написано число p_{12}^2, а сверху написаны числа $-p_{12}$ и p_{12}. □

Задача 8.5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом 46°, как изображено на рисунке. Сколько градусов составляет острый угол между биссектрисами углов A и B?



Ответ: 67.

Решение. Отметим точки пересечения биссектрис K, L, M, N (см. рис. 2). Кроме этого, обозначим $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$, $\angle D = 2\delta$. Поскольку сумма углов четырёхугольника

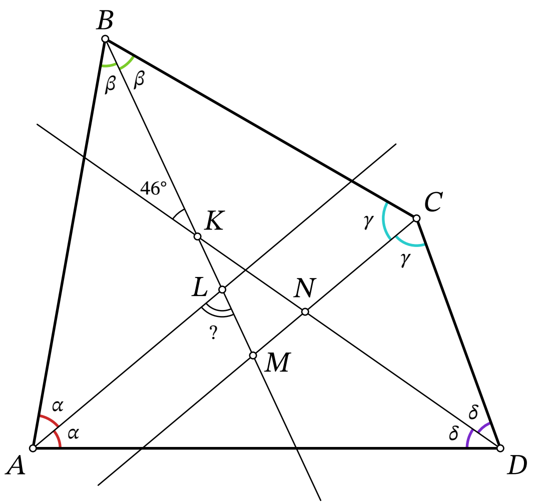


Рис. 2: к решению задачи 8.5

$ABCD$ равна 360°, имеем:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ.$$

Рассмотрим треугольник KMN. В нём:

- $\angle MKN = 46^\circ$,

- $\angle KMN = \angle ALM = \alpha + \beta$, так как ALM — внешний угол треугольника ABL (этот угол и нужно найти в задаче),
- $\angle KNM = \angle CND = 180^\circ - \gamma - \delta = \alpha + \beta$.

Следовательно, треугольник KMN — равнобедренный, и $\angle KMN = \dfrac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ$. $\square$

Другое решение. Зафиксируем угол A и перенесём параллельно угол C так, чтобы вершина C оказалась на биссектрисе угла A. (Или более формально, отметим на биссектрисе угла A точку C' и проведём из неё лучи, сонаправленные лучам CB и CD; пересечения этих лучей с лучами AB и AD соответственно обозначим через B' и D', как на рис. 3.)

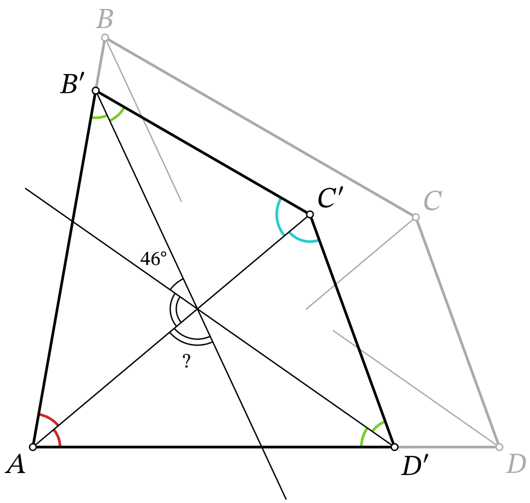


Рис. 3: к решению задачи 8.5

Стороны нового четырёхугольника $AB'C'D'$ параллельны сторонам исходного; значит, и углы между этими сторонами такие же. Следовательно, биссектрисы нового четырёхугольника параллельны соответствующим биссектрисам исходного, и углы между ними тоже сохранились.

Но это означает, что биссектрисы углов A и C' совпадают, то есть вся новая картинка симметрична относительно прямой AC' (из равенства треугольников $AB'C'$ и $AD'C'$ по общей стороне и прилежащим к ней углам).

Из симметрии следует, что другие две биссектрисы пересекаются на прямой AC' и образуют с ней равные углы. Тогда искомый угол после удвоения будет дополнять 46° до развёрнутого. Следовательно, он равен $\frac{1}{2}(180^\circ - 46^\circ) = 67^\circ$. $\square$

Задача 8.6. Натуральное число n таково, что значение выражения $n^2 + 492$ является точным квадратом.

(а) *(2 балла)* Укажите любое возможное значение n.
(б) *(2 балла)* Чему может быть равно n? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $n = 38; 122$.

Решение. Пусть $n^2 + 492 = k^2$ для некоторого натурального $k > n$. Тогда

$$2^2 \cdot 3 \cdot 41 = 492 = k^2 - n^2 = (k-n)(k+n).$$

Числа $k - n$ и $k + n$ имеют одинаковую чётность, поэтому они оба должны быть чётны. Поскольку $k - n < k + n$, имеем лишь два возможных случая.

- Пусть $k - n = 2$ и $k + n = 246$. Тогда $k = \frac{246+2}{2} = 124$ и $n = \frac{246-2}{2} = 122$.
- Пусть $k - n = 6$ и $k + n = 82$. Тогда $k = \frac{82+6}{2} = 44$ и $n = \frac{82-6}{2} = 38$.

Легко проверить, что обе эти пары подходят под условие. □

Задача 8.7. Сколько существует способов расположить в ряд n крестиков и 13 ноликов так, чтобы среди любых трёх подряд идущих значков нашёлся хотя бы один нолик, если
(а) *(2 балла)* $n = 27$;
(б) *(2 балла)* $n = 26$?

Ответ: **(а)** 14. **(б)** 105.

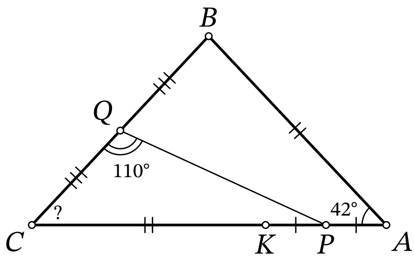
Решение. Пронумеруем нолики слева направо числами от 1 до 13. Обозначим количество крестиков перед первым ноликом через a_1, между первым и вторым ноликом — через a_2, …, после тринадцатого нолика — через a_{14}. Получаем, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{14} = n$. То, что среди любых трёх подряд идущих значков есть хотя бы один нолик, эквивалентно тому, что три крестика не могут идти подряд, то есть $a_i \leqslant 2$ для любого $i = 1, 2, \ldots, 14$. Заметим, что подходящие последовательности крестиков и ноликов взаимно однозначно сопоставляются последовательностям $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ с указанными условиями.

(а) Сумма 14 целых неотрицательных чисел равна 27, причём каждое из них не больше 2. Это означает, что какое-то одно a_i должно быть равно 1, а все остальные должны быть равны 2. Так как i может принимать любое значение от 1 до 14, получаем, что вариантов ровно 14.

(б) Теперь сумма 14 целых неотрицательных чисел равна 26. Это означает, что либо какое-то a_i равно 0, а все остальные равны 2, либо какие-то a_j и a_k равны 1, а все остальные равны 2. В первом случае получаем 14 вариантов. Во втором случае получаем $C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$ вариант, ведь нам нужно выбрать 2 индекса из 14 возможных.

Итого получаем ровно $14 + 91 = 105$ вариантов. □

Задача 8.8. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 42^\circ$ и $AB < AC$. Точка K на стороне AC такова, что $AB = CK$. Точки P и Q — середины отрезков AK и BC соответственно. Сколько градусов составляет угол ACB, если известно, что $\angle PQC = 110^\circ$?



Ответ: 49.

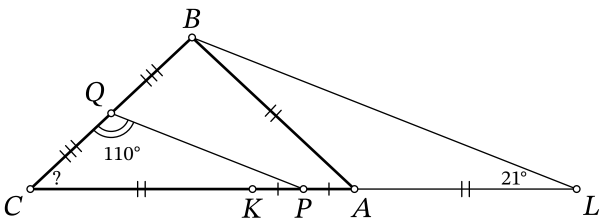


Рис. 4: к решению задачи 8.8

Решение. Отметим на продолжении стороны CA за точку A точку L такую, что $AL = AB$ (рис. 4).

Заметим, что прямая PQ параллельна прямой BL как средняя линия в треугольнике BCL. Получаем, что $\angle LBC = \angle PQC = 110°$.

В равнобедренном треугольнике BAL внешний угол при вершине A равен 42°, поэтому углы при основании равны $\angle ALB = \angle ABL = \frac{1}{2} \cdot 42° = 21°$.

Из суммы углов треугольника BCL находим искомый угол:

$$\angle ACB = 180° - \angle CLB - \angle LBC = 180° - 110° - 21° = 49°. \qquad \square$$

8 класс

Вариант 8.1.1. В ящике лежат апельсины, груши и яблоки, всего 60 фруктов. Известно, что яблок в 3 раза больше, чем не яблок, а груш в 5 раз меньше, чем не груш. Сколько апельсинов лежит в ящике?

Ответ: 5.

Вариант 8.1.2. В ящике лежат апельсины, груши и яблоки, всего 120 фруктов. Известно, что яблок в 3 раза больше, чем не яблок, а груш в 5 раз меньше, чем не груш. Сколько апельсинов лежит в ящике?

Ответ: 10.

Вариант 8.1.3. В ящике лежат апельсины, груши и яблоки, всего 180 фруктов. Известно, что яблок в 3 раза больше, чем не яблок, а груш в 5 раз меньше, чем не груш. Сколько апельсинов лежит в ящике?

Ответ: 15.

Вариант 8.1.4. В ящике лежат апельсины, груши и яблоки, всего 240 фруктов. Известно, что яблок в 3 раза больше, чем не яблок, а груш в 5 раз меньше, чем не груш. Сколько апельсинов лежит в ящике?

Ответ: 20.

Вариант 8.2.1. Олег купил шоколадку за n рублей, а через некоторое время продал её за 96 рублей. Оказалось, что он продал шоколадку ровно на $n\%$ дороже, чем покупал. За сколько рублей Олег купил шоколадку?

Ответ: 60.

Вариант 8.2.2. Олег купил шоколадку за n рублей, а через некоторое время продал её за 119 рублей. Оказалось, что он продал шоколадку ровно на $n\%$ дороже, чем покупал. За сколько рублей Олег купил шоколадку?

Ответ: 70.

Вариант 8.2.3. Олег купил шоколадку за n рублей, а через некоторое время продал её за 144 рубля. Оказалось, что он продал шоколадку ровно на $n\%$ дороже, чем покупал. За сколько рублей Олег купил шоколадку?

Ответ: 80.

Вариант 8.2.4. Олег купил шоколадку за n рублей, а через некоторое время продал её за 171 рубль. Оказалось, что он продал шоколадку ровно на $n\%$ дороже, чем покупал. За сколько рублей Олег купил шоколадку?

Ответ: 90.

Вариант 8.3.1. У Маши есть три одинаковых игральных кубика, на гранях каждого из них написано шесть различных простых чисел с суммой 87.

Маша дважды кинула все три кубика. В первый раз сумма выпавших чисел равнялась 10, во второй раз сумма выпавших равнялась 62.

Ровно одно из шести чисел ни разу не выпало. Какое?

Ответ: 17.

Вариант 8.3.2. У Маши есть три одинаковых игральных кубика, на гранях каждого из них написано шесть различных простых чисел с суммой 89.

Маша дважды кинула все три кубика. В первый раз сумма выпавших чисел равнялась 10, во второй раз сумма выпавших равнялась 62.

Ровно одно из шести чисел ни разу не выпало. Какое?

Ответ: 19.

Вариант 8.3.3. У Маши есть три одинаковых игральных кубика, на гранях каждого из них написано шесть различных простых чисел с суммой 83.

Маша дважды кинула все три кубика. В первый раз сумма выпавших чисел равнялась 10, во второй раз сумма выпавших равнялась 62.

Ровно одно из шести чисел ни разу не выпало. Какое?

Ответ: 13.

Вариант 8.3.4. У Маши есть три одинаковых игральных кубика, на гранях каждого из них написано шесть различных простых чисел с суммой 81.

Маша дважды кинула все три кубика. В первый раз сумма выпавших чисел равнялась 10, во второй раз сумма выпавших равнялась 62.

Ровно одно из шести чисел ни разу не выпало. Какое?

Ответ: 11.

Вариант 8.4.1. В клетках таблицы 2×35 (2 строки, 35 столбцов) расставлены ненулевые действительные числа, причём в верхней строке все числа различны. Для любых двух чисел, стоящих в одном столбце, выполнено следующее условие: одно число является квадратом другого.
(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть в этой таблице?
(б) *(3 балла)* Какое наименьшее количество различных чисел может быть в нижней строке?

Ответ: **(а)** 35. **(б)** 12.

Вариант 8.4.2. В клетках таблицы 2×38 (2 строки, 38 столбцов) расставлены ненулевые действительные числа, причём в верхней строке все числа различны. Для любых двух чисел, стоящих в одном столбце, выполнено следующее условие: одно число является квадратом другого.
(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть в этой таблице?
(б) *(3 балла)* Какое наименьшее количество различных чисел может быть в нижней строке?

Ответ: **(а)** 38. **(б)** 13.

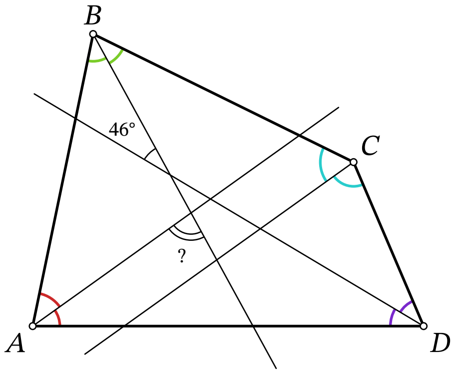
Вариант 8.4.3. В клетках таблицы 2×32 (2 строки, 32 столбца) расставлены ненулевые действительные числа, причём в верхней строке все числа различны. Для любых двух чисел, стоящих в одном столбце, выполнено следующее условие: одно число является квадратом другого.
(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть в этой таблице?
(б) *(3 балла)* Какое наименьшее количество различных чисел может быть в нижней строке?

Ответ: **(а)** 32. **(б)** 11.

Вариант 8.4.4. В клетках таблицы 2×41 (2 строки, 41 столбец) расставлены ненулевые действительные числа, причём в верхней строке все числа различны. Для любых двух чисел, стоящих в одном столбце, выполнено следующее условие: одно число является квадратом другого.
(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть в этой таблице?
(б) *(3 балла)* Какое наименьшее количество различных чисел может быть в нижней строке?

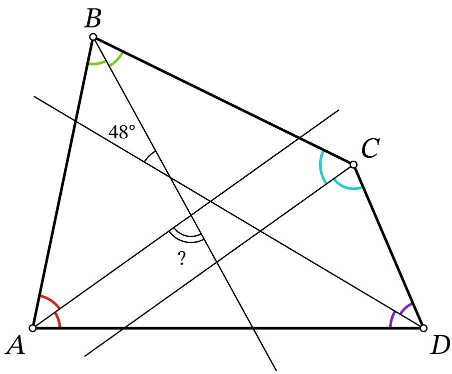
Ответ: **(а)** 41. **(б)** 14.

Вариант 8.5.1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом 46°, как изображено на рисунке. Сколько градусов составляет острый угол между биссектрисами углов A и B?



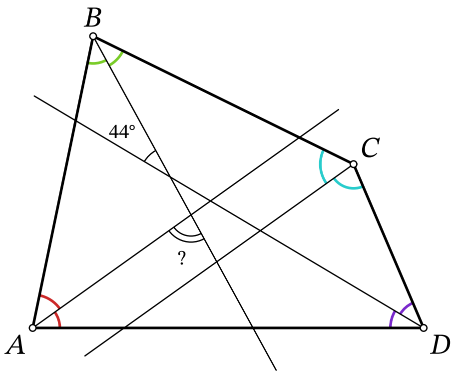
Ответ: 67.

Вариант 8.5.2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом 48°, как изображено на рисунке. Сколько градусов составляет острый угол между биссектрисами углов A и B?



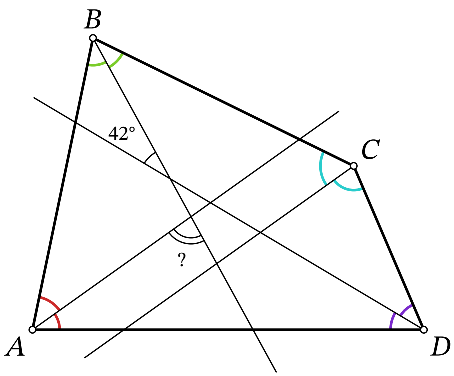
Ответ: 66.

Вариант 8.5.3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом 44°, как изображено на рисунке. Сколько градусов составляет острый угол между биссектрисами углов A и B?



Ответ: 68.

Вариант 8.5.4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом 42°, как изображено на рисунке. Сколько градусов составляет острый угол между биссектрисами углов A и B?



Ответ: 69.

Вариант 8.6.1. Натуральное число n таково, что значение выражения $n^2 + 492$ является точным квадратом.

(а) *(2 балла)* Укажите любое возможное значение n.

(б) *(2 балла)* Чему может быть равно n? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $n = 38; 122$.

Вариант 8.6.2. Натуральное число n таково, что значение выражения $n^2 + 516$ является точным квадратом.

(а) *(2 балла)* Укажите любое возможное значение n.

(б) *(2 балла)* Чему может быть равно n? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $n = 40; 128$.

Вариант 8.6.3. Натуральное число n таково, что значение выражения $n^2 + 564$ является точным квадратом.
(а) *(2 балла)* Укажите любое возможное значение n.
(б) *(2 балла)* Чему может быть равно n? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $n = 44; 140$.

Вариант 8.7.1. Сколько существует способов расположить в ряд n крестиков и 13 ноликов так, чтобы среди любых трёх подряд идущих значков нашёлся хотя бы один нолик, если
(а) *(2 балла)* $n = 27$;
(б) *(2 балла)* $n = 26$?

Ответ: **(а)** 14. **(б)** 105.

Вариант 8.7.2. Сколько существует способов расположить в ряд n крестиков и 14 ноликов так, чтобы среди любых трёх подряд идущих значков нашёлся хотя бы один нолик, если
(а) *(2 балла)* $n = 29$;
(б) *(2 балла)* $n = 28$?

Ответ: **(а)** 15. **(б)** 120.

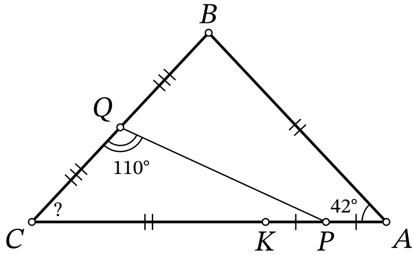
Вариант 8.7.3. Сколько существует способов расположить в ряд n крестиков и 12 ноликов так, чтобы среди любых трёх подряд идущих значков нашёлся хотя бы один нолик, если
(а) *(2 балла)* $n = 25$;
(б) *(2 балла)* $n = 24$?

Ответ: **(а)** 13. **(б)** 91.

Вариант 8.7.4. Сколько существует способов расположить в ряд n крестиков и 11 ноликов так, чтобы среди любых трёх подряд идущих значков нашёлся хотя бы один нолик, если
(а) *(2 балла)* $n = 23$;
(б) *(2 балла)* $n = 22$?

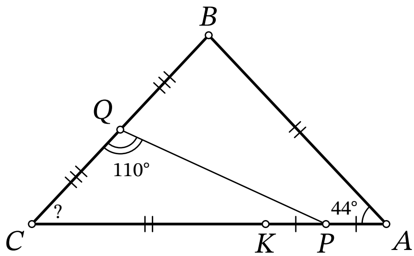
Ответ: **(а)** 12. **(б)** 78.

Вариант 8.8.1. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 42^\circ$ и $AB < AC$. Точка K на стороне AC такова, что $AB = CK$. Точки P и Q — середины отрезков AK и BC соответственно. Сколько градусов составляет угол ACB, если известно, что $\angle PQC = 110^\circ$?



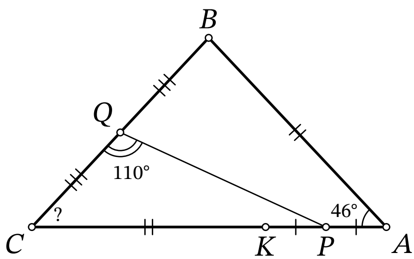
Ответ: 49.

Вариант 8.8.2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 44°$ и $AB < AC$. Точка K на стороне AC такова, что $AB = CK$. Точки P и Q — середины отрезков AK и BC соответственно. Сколько градусов составляет угол ACB, если известно, что $\angle PQC = 110°$?



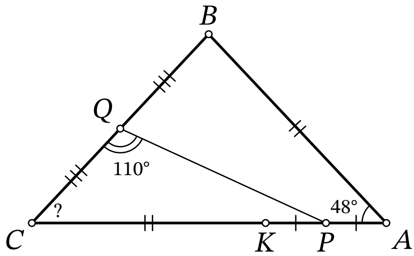
Ответ: 48.

Вариант 8.8.3. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 46°$ и $AB < AC$. Точка K на стороне AC такова, что $AB = CK$. Точки P и Q — середины отрезков AK и BC соответственно. Сколько градусов составляет угол ACB, если известно, что $\angle PQC = 110°$?



Ответ: 47.

Вариант 8.8.4. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 48°$ и $AB < AC$. Точка K на стороне AC такова, что $AB = CK$. Точки P и Q — середины отрезков AK и BC соответственно. Сколько градусов составляет угол ACB, если известно, что $\angle PQC = 110°$?



Ответ: 46.