10.5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого произведение чисел n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+20$ делится на квадрат какого-то одного из них. *(А. Храбров)*

Ответ. 20!.

Решение. При $n = 20!$ имеем $\dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+20)}{n^2} = \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+20)}{20!} = C_{n+20}^{20}$ — целое число.

Пусть теперь $n > 20!$ и пусть $P = n(n+1)(n+2)\ldots(n+20)$ делится на k^2, где $k = n+i$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 20\}$. Имеем $P/k = (k-i)(k-i+1)\ldots(k-1)(k+1)(k+2)\ldots(k+j)$, где $j = 20-i$. Заметим, что число $P/k \equiv (-1)^i i!j! \pmod k$ должно делиться на k. Но $0 < i!j! \leqslant i!\cdot(i+1)(i+2)\ldots(i+j) = 20! < n \leqslant k$, значит, $i!j!$ не делится на k. Противоречие.

Комментарий. Только (верный) ответ — 1 балл.

Проверка, что ответ подходит — 1 балл.

Оценка — 5 баллов.

Непроведённые вычисления, требующие от жюри существенной работы по проверке — снимается 1 балл.

Арифметическая ошибка, приводящая к неправильному вычислению одного из показателей — снимается 2 балла.

Явно сформулированное неравенство $k!(20-k)! \leqslant 20!$ принимается без доказательства.

Используется, но не доказано, что произведение $|i-k|$ по всем i, кроме k, меньше 20! — снимается 1 балл.

Утверждение о том, что если $(x, y) = d$, то x/d взаимно просто с y — снимается 2 балла.

Неправильная работа с неравенствами при подсчёте степени вхождения — снимается 1 балл.

10.6. Квадрат 100×100 разбит на квадраты 2×2. Потом его разбивают на доминошки (прямоугольники 1×2 и 2×1). Какое наименьшее количество доминошек могло оказаться внутри квадратов разбиения? (*С. Берлов*)

Ответ. 100.

Решение. *Пример.* Верхнюю и нижнюю горизонтали разобьём на горизонтальные доминошки — они окажутся в квадратах 2×2. Остальной прямоугольник 98×100 разобьём на вертикальные доминошки — они не окажутся в квадратах 2×2.

Оценка. Рассмотрим квадраты A_1, A_3, $\ldots$, A_{99} размеров 1×1, 3×3, $\ldots$, 99×99, у которых левый нижний угол совпадает с левым нижним углом исходного квадрата 100×100. Для каждого из квадратов A_i $(i = 1, 3, 5, \ldots, 99)$ найдётся доминошка X_i, пересекающая его сторону (поскольку квадраты нечётной площади не разбиваются на доминошки). Легко видеть, что X_i лежит внутри квадратика 2×2 из разбиения.

Аналогично, рассматривая квадраты B_1, B_3, $\ldots$, B_{99} размеров 1×1, 3×3, $\ldots 99 \times 99$, у которых правый верхний угол совпадает с правым верхним углом исходного квадрата 100×100, находим ещё 50 нужных нам доминошек Y_j $(j = 1, 3, 5, \ldots, 99)$.

Это завершает решение (очевидно, что все доминошки X_1, X_3, $\ldots$, X_{99}, Y_1, Y_3, $\ldots$, Y_{99} различны).

Замечание. Приведём схему несколько другого доказательства оценки.

Пусть внутри квадратов 2×2 оказалось не более 99 доминошек.

Проведём 50 вертикальных линий сетки v_1, v_3, v_5, $\ldots$, v_{99} так, что v_i отделяет i столбцов слева. Легко видеть, что любая доминошка, пересекаемая одной из линий v_1, v_3, v_5, $\ldots$, v_{99}, нам подходит. Каждая вертикальная линия пересекает чётное количество доминошек, так как слева от этой линии чётное количество клеток. Значит, среди линий v_1, v_3, v_5, $\ldots$, v_{99} есть линия v_i, не пересекающая доминошек, иначе мы уже нашли хотя бы $2 \cdot 50 = 100$ нужных нам доминошек. Проведём аналогичное рассуждение для 50 горизонтальных линий сетки h_1, h_3, h_5, $\ldots$, h_{99} и найдём среди них линию h_j, не пересекающую доминошек. Но v_i и h_j делят доску на области с нечётным количеством клеток, поэтому хотя бы одна из этих двух линий обязана пересекать доминошку. Противоречие.

Комментарий. Только пример — 1 балл.

Доказано лишь, что число доминошек чётно — 0 баллов.

Критерии решения с путями из хороших (лежащих в квадратах 2×2) доминошек следующие.

Только идея путей — 0 баллов.

Доказано, что рядом с каждой хорошей доминошкой есть ещё хотя бы одна хорошая, и есть идея построения пути из этих доминошек — 1 балл.

Для полного решения задачи осталось решить проблему зацикливания и пересечения путей из доминошек, при этом НЕТ разбиения на области сдвигом сетки и построения из них графа с чётными степенями вершин, и есть пример — всего 3 балла.

Для полного решения задачи осталось решить проблему зацикливания и пересечения путей из доминошек, при этом ЕСТЬ разбиение на области сдвигом сетки и построения из них графа с чётными степенями вершин, и есть пример — 5 баллов.

Попытка закрыть проблему зацикливания тем, что в таком случае получается область нечётной области, БЕЗ полного и верного доказательства — 0 баллов.

Задача решена, но с доказательством пересечения путей есть незначительные ошибки — 6 баллов.

Критерии решения с разбиением на области, каждая из которых содержит хорошую (лежащую в квадрате 2×2) доминошку, следующие.

Разбиение на области, в каждой из которых действительно есть хотя бы одна хорошая доминошка (но это не доказано) — 1 балл.

Есть разбиение на области и доказательство, что задача решена, если бы мы доказали, что в каждой области есть хотя бы одна хорошая доминошка; но само это утверждение не доказано или содержит существенные ошибки — всего 3 балла.

Есть разбиение на области и доказательство, что задача решена, если бы мы доказали, что в каждой области есть хотя бы одна хорошая доминошка, но само это утверждение доказано с небольшими помарками — 5 или 6 баллов.

Попытки подсчёта числа границ квадратов 2×2 (внутренних или внешних), не доведённые до верного решения — 0 баллов.

10.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC пересекаются в точке G. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD, пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD, пересекаются в точке F. Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая EC повторно пересекает окружность (ABC) в точке X, а прямая EA повторно пересекает окружность (ACD) в точке Y (мы разберём расположение точек, указанное на рис. 5; другие случаи рассматриваются аналогично).

Рассмотрим гомотетию с центром E, переводящую (ABC) в (ACD). При такой гомотетии точка X переходит в C, а точка A — в Y. Отсюда $AX \parallel YC$ и $\angle AEC = \angle AYC - \angle ECY = \angle AYC - \angle AXC$.

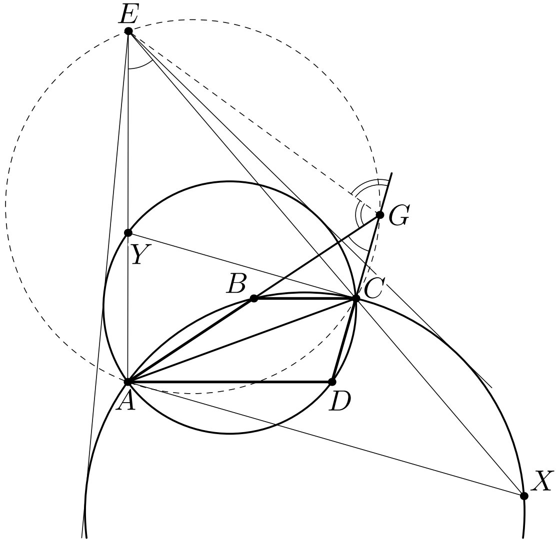

Рис. 5

Но $\angle AXC = 180^\circ - \angle ABC$ и $\angle AYC = 180^\circ - \angle ADC$. Значит, $\angle AEC = \angle ABC - \angle ADC = \angle ABC - \angle BCG = \angle BGC$. Из полученного равенства следует, что точки A, C, E, G лежат на одной окружности.

Поскольку точка E лежит на серединном перпендикуляре к AC (т. е. на оси симметрии окружностей (ABC) и (ACD)), она является серединой дуги AGC окружности $(ACEG)$. Значит, E лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Аналогично показывается, что F также лежит на внешней биссектрисе угла BGC.

Замечание. У задачи есть следующее обобщение. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, $G = AB \cap CD$, а M — вторая точка пересечения окружностей (ADG) и (BCG) (иначе говоря, *точка*

Микеля этого четырёхугольника). Пусть E — центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей (ABC) в (ADC). Тогда точки A, C, M, E лежат на одной окружности, причём E — середина дуги AC (т. е. ME — биссектриса угла между AM и CM).

Доказать это можно аналогично решению решении задачи: имеем (в направленных углах) $\angle AEC = \angle ABC + \angle ADC = \angle GBC + \angle AMG = \angle GMC + \angle AMG = \angle AMC$.

Комментарий. Показано, что отношения радиусов окружностей в парах равны (и равны отношению боковых сторон) — баллы не добавляются.

Получены результаты о конфигурации из центров окружностей и положении E и F относительно них (например, направления O_iO_j, подобие конструкции из центров и $ABCD$, $AE = EC$, $EO_1/EO_2 = r_1/r_2$, проекции EO_1 и FO_2 на AD равны, и эквивалентные продвижения) — баллы не добавляются.

Утверждается без доказательства, что EF есть внешняя биссектриса — баллы не добавляются.

Рассмотрены инверсия + симметрия (меняющие местами окружности (ABC) и (ADC)) — баллы не добавляются.

Рассматриваются гомотетии, композиции гомотетий, применения теоремы о колпаках (без дальнейшего продвижения) — баллы не добавляются.

Пусть $BA'D'C$ — образ $ABCD$ при гомотетии с центром G. Задача сведена к факту совпадения центров гомотетии пар окружностей (ABC), $(D'BC)$ и (DBC), $(A'BC)$ — 1 балл.

10.8. Дано число $a \in (0,1)$. Положительные числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют условиям $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = n + a$ и $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = n + \frac{1}{a}$. Найдите наименьшее значение выражения $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$. *(А. Храбров)*

Ответ. $n + a^2$.

Решение. Заметим, что равенство достигается при $x_0 = a$ и $x_1 = \ldots = x_n = 1$.

Запишем $\sum x_k^2 = \sum(1-x_k)^2 + 2\sum x_k - (n+1) = \sum(1-x_k)^2 +$

$+\,n-1+2a$. Достаточно доказать, что $\sum(1-x_k)^2 \geqslant (1-a)^2$. Пусть x_0 — наименьшее из чисел.

При $x_0 \leqslant a$ имеем $\sum(1-x_k)^2 \geqslant (1-x_0)^2 \geqslant (1-a)^2$.

Если же $x_0 \geqslant a$, то $\sum(1-x_k)^2 = \sum x_k\left(\frac{1}{x_k}-2+x_k\right)$, что, поскольку выражения в скобках неотрицательны, не меньше, чем $a\sum\left(\frac{1}{x_k}-2+x_k\right) = a\left(n+\frac{1}{a}-2(n+1)+n+a\right) = a\left(\frac{1}{a}-2+a\right) = (a-1)^2$.

Комментарий. Доказано, что каждая переменная не меньше a — 1 балл.

Ответ с примером без обоснований — 0 баллов.

Неполное решение, основанное на методе множителей Лагранжа (не упоминается, что точка минимума существует и/или что точка минимума не является граничной) — 0 баллов.

Неполное решение, основанное на pqr-методе. Например, не доказывается строго, что при фиксации отношения q/r в точке максимума какие-то два корня совпадают. Как правило, в качестве «доказательств» приводятся или подмены утверждений на равносильные («тут ещё были решения, а тут нет, поэтому какие-то два совпадают»), или неформализуемые рассуждения про движения графиков («график движется непрерывно, поэтому корни совпадают») — 0 баллов.