

7.1. Конвейер. На ленте конвейера, движущейся с некоторой скоростью v , находятся цилиндрические емкости. Над лентой через каждые L метров установлены краны, из которых в те промежутки времени когда под ними проходят емкости, с постоянным объемным расходом выливается готовый продукт. За некоторое время t_0 емкость заполняется на половину своего объема V .

1) Какая часть объема V будет заполняться за то же время t_0 , если расстояние между кранами увеличить в 2 раза, а скорость движения ленты в 3?

2) Представьте, что все размеры емкости увеличили в 2 раза, расстояние между кранами – в три раза, а скорость движения ленты установили $2v$. Какая часть объема V_1 новой емкости заполнится за время $4,5t_0$?

При решении задачи считайте, что $t_0 \ll L/v$.

7.1. Возможное решение. Если $t_0 \ll L/v$, то за время t_0 сосуд окажется под кранами

$n = \frac{vt_0}{L}$ раз. Под каждым краном сосуд будет находиться в течение времени $\tau = \frac{d}{v}$, где d – диаметр сосуда. Таким образом, за время t_0 в сосуд нальется объем продукта

$V_1 = \mu\tau n = \mu \frac{d}{v} \frac{vt_0}{L} = \frac{\mu dt_0}{L}$, где μ – объем продукта, выливающийся из крана в единицу

времени (расход). Видно, что скорость заполнения сосуда не зависит от скорости v

движения ленты. По условию задачи $\frac{\mu dt_0}{L} = \frac{V}{2}$.

1) Если расстояние между кранами увеличить в 2 раза, то за то же время, независимо от скорости конвейера, будет заполняться объем $V/4$.

2) Если все размеры емкости увеличить в 2 раза, то ее диаметр увеличится в 2 раза ($d_1 = 2d$)

, а объем – в 8 раз ($V_1 = 8V$). За время $4,5t_0$ готовым продуктом заполнится объем:

$$\mu \frac{2d}{3L} 4,5t_0 = \left(\frac{\mu dt_0}{L} \right) \frac{2 \cdot 4,5}{3} = \frac{3}{2} V = \frac{3}{2} \frac{V_1}{8} = \frac{3}{16} V_1.$$

№	7.1. Критерии оценивания (из 15 баллов)	Баллы
1	Отмечено, что скорость заполнения ёмкости не зависит от скорости движения ленты	2
2	Записана зависимость между временем, проведённым под краном, и полным временем движения	3
3	В любом виде записано верное уравнение, связывающее объём и время	2
4	Определено, что в первом случае заполнится четверть объёма	3
5	Верно посчитано соотношение между старым и новым объёмами ёмкости во втором случае	3
6	Определено, что во втором случае будет заполнено 3/16 объёма V_1 Если ответ представлен в виде $3V/2$, ставьте 1 балл	2

Всероссийская олимпиада школьников им. Максвелла
Региональный этап. Теоретический тур. 22 января 2022 г.
7 класс

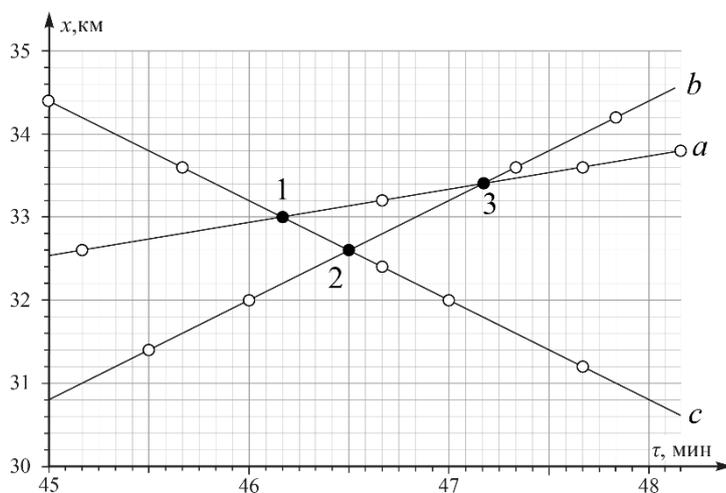
7.2. Неудачное испытание. Во время испытаний дрона, созданного для наблюдения за движением транспортных средств по загородному шоссе, что-то пошло не так. Дрон выдал таблицу в которой вперемешку приведены координаты трёх находящихся на трассе автомобилей в разные моменты времени.

Время, ч:мин:с	x, км
12:45:00	34,4
12:45:10	32,6
12:45:30	31,4
12:45:40	33,6
12:46:00	32,0
12:46:40	32,4
12:46:40	33,2
12:46:50	33,0
12:47:00	32,0
12:47:20	33,6
12:47:40	31,2
12:47:40	33,6
12:47:50	34,2
12:48:10	33,8

Считая, что автомобили двигались с постоянными скоростями вдоль оси x , не разворачиваясь, определите:

- величины скоростей автомобилей;
- координаты и моменты времени, когда автомобили поравнялись (встречались или обгоняли друг друга).

7.2. Возможное решение. На координатной сетке x от t отметим положение автомобилей в разные моменты времени (согласно табличным данным). Так как автомобили едут с постоянной скоростью, проведём через нанесённые точки три прямые (a, b, c) так, чтобы не осталось точек вне прямых. По угловому коэффициенту этих прямых вычислим искомые скорости:



$$v_a = 24 \text{ км/ч}; v_b = 72 \text{ км/ч}; v_c = 72 \text{ км/ч}.$$

Точки (1), (2) и (3) – соответствуют моментам времени встреч или обгона автомобилями друг друга. Встреча автомобиля (a) и (c): $x = 33$ км при $t = 12$ ч 46 мин 10 с.

Встреча автомобиля (b) и (c): $x = 32,6$ км при $t = 12$ ч 46 мин 30 с.

Встреча автомобиля (a) и (b): $x = 33,4$ км при $t = 12$ ч 47 мин 10 с.

№	7.2. Критерии оценивания (из 15 баллов).	Баллы
1	Построен график x от t и нанесены координатные точки	3
2	Проведены прямые, соответствующие движению каждого из автомобилей (по 2 балла за каждую прямую)	6
3	Найдены скорости автомобилей (по 1 баллу за каждую)	3
4	Найдены координаты точек, соответствующих моментам времени встреч или обгонов	3

7.3. Маша и медведи. В комнате у Маши стоит аквариум объёмом V_0 , частично заполненный водой плотностью ρ_0 . Также у Маши есть два одинаковых плюшевых медведя. Когда Маша погрузила одного медведя в аквариум, он намок и опустился на дно; при этом средняя плотность содержимого аквариума оказалась равной ρ_1 , а когда она погрузила и второго медведя, плотность стала равной ρ_2 . Определите массу m одного медведя. Вода из аквариума не вытекала.

7.3. Возможное решение. Пусть при погружении одного медведя суммарный объём содержимого аквариума стал равным $V_0 + V_1$, где V_1 – объём воды, вытесненной промокшим медведем. Найдём среднюю плотность системы:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0 V_0 + m}{V_0 + V_1}. \quad (1)$$

Поскольку медведи одинаковые, при погружении в аквариум второго медведя объём системы станет равным $V_0 + 2V_1$. Найдём среднюю плотность системы ρ_2 :

$$\rho_2 = \frac{\rho_0 V_0 + 2m}{V_0 + 2V_1}. \quad (2)$$

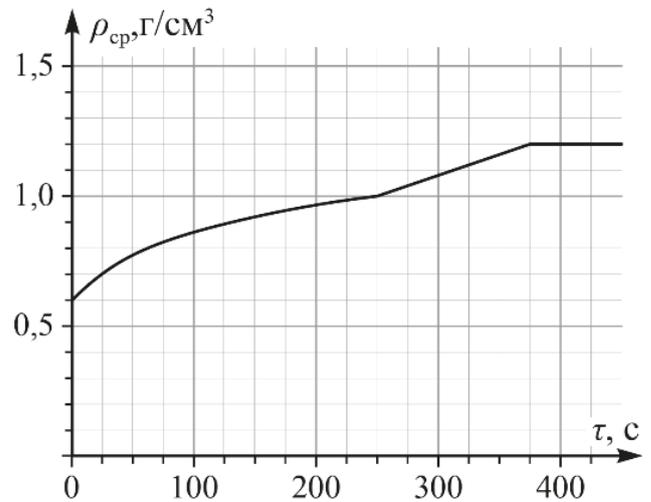
Решая систему уравнений (1) и (2), получим:

$$m = \frac{V_0(\rho_1 \rho_2 - \rho_0(2\rho_2 - \rho_1))}{2(\rho_2 - \rho_1)}.$$

№	7.3. Критерии оценивания (из 15 баллов)	Баллы
1	Получено выражение для массы содержимого аквариума при погружении одного медведя	2
2	Получено выражение для объёма содержимого аквариума при погружении одного медведя	2
3	Получена формула (1)	1
4	Получено выражение для массы содержимого аквариума при погружении двух медведей	2
5	Получено выражение для объёма содержимого аквариума при погружении двух медведей	2
6	Получена формула (2)	1
7	Объём V_1 исключён из уравнений (1) и (2)	3
8	Получено выражение для m	2

7.4. Стратифицированные жидкости.

В цилиндрическом сосуде находится $V_1 = 100$ мл жидкости плотностью ρ_1 . В него начинают наливать с постоянным массовым расходом μ жидкость с плотностью ρ_2 . График зависимости средней плотности содержимого сосуда от времени представлен на рисунке. Определите плотности ρ_1 и ρ_2 , объём V_0 сосуда и массовый расход μ . Жидкости не смешиваются.



7.4. Возможное решение.

$$1) \quad \rho_{\text{cp}}(t) = \frac{\rho_1 V_1 + \mu t}{V_1 + \frac{\mu t}{\rho_2}} \quad \text{при } t \leq t_1, \text{ где } t_1 = \frac{\rho_2 (V_0 - V_1)}{\mu}.$$

$$2) \quad \rho_{\text{cp}}(t) = \frac{\rho_1 \left(V_0 - \frac{\mu t}{\rho_2} \right) + \mu t}{V_0} \quad \text{при } t_1 \leq t \leq t_2, \text{ где } t_2 = \frac{\rho_2 V_0}{\mu}.$$

$$3) \quad \rho_{\text{cp}}(t) = \rho_2 \quad \text{при } t \geq t_2.$$

Из графика (для момента времени $t = 0$) получим: $\rho_1 = 0,6 \text{ г/см}^3$.

Из графика (для момента времени $t > 375$ с) получим: $\rho_2 = 1,2 \text{ г/см}^3$.

Решая совместно уравнения (1) и (2) для t_1 и t_2 находим: $\mu = 0,96 \text{ г/с}$; $V_0 = 300 \text{ мл}$.

№	7.4. Критерии оценивания (из 15 баллов)	Баллы
1	Из графика (для момента времени $t = 0$) найдено значение $\rho_1 = 0,6 \text{ г/см}^3$.	2
2	Из графика (для момента времени $t > 375$ с) найдено значение $\rho_2 = 1,2 \text{ г/см}^3$.	2
3	Записано уравнение для t_1	3
4	Записано уравнение для t_2	3
5	Из системы уравнений для t_1 и t_2 найдено значение μ	3
6	Из системы уравнений для t_1 и t_2 найдено значение V_0	2