

Материалы для проведения
регионального этапа
XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2021–2022 учебный год

Первый день

4–5 февраля 2022 г.

Москва, 2022

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, А. С. Кузнецов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.



ВВЕДЕНИЕ

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **4 февраля 2022 г.** (I тур) и **5 февраля 2022 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временными регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2021–2022 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

◆

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 класс

- 9.1. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75? (П. Кожевников)

Ответ. Может.

Решение. Пример: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20. В этом наборе три числа (5, 10, 20) делятся на 5, четыре числа (4, 8, 12, 20) делятся на 4, а общая сумма равна 71.

Замечание. Можно доказать (но, конечно, в задаче этого не требуется), что на самом деле в любом примере, удовлетворяющем условию задачи, должны обязательно присутствовать числа 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12 и 20, а вместо числа 6 можно взять 7 или 9.

Комментарий. Для получения полного балла (7 баллов за задачу) достаточно наличие верного примера без указания, какие числа делятся на 4 и 5, явный подсчёт суммы тоже не требуется. Любой неработающий пример оценивается в 0 баллов.

- 9.2. На доске девять раз (друг под другом) написали некоторое натуральное число N . Петя к каждому из 9 чисел приписал слева или справа одну ненулевую цифру; при этом все приписанные цифры различны. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди 9 полученных чисел? (И. Ефремов)

Ответ. 6.

Решение. Пусть S — сумма цифр числа N . Тогда суммы цифр полученных чисел будут равны $S + 1, S + 2, \dots, S + 9$. Три из этих сумм будут делиться на 3. По признаку делимости на 3, соответствующие три числа на доске также будут делиться на 3. При этом они будут больше 3, а значит, будут составными. Поэтому больше 6 простых чисел на доске оказаться не может.

Шесть простых чисел может оказаться даже при $N = 1$ —

например, если Петя получит, среди прочих, числа 11, 13, 41, 61, 17 и 19.

Замечание. Петя может получить шесть простых чисел, даже если он будет приписывать цифры лишь с одной стороны — например, из числа $N = 3$ он может получить числа 13, 23, 43, 53, 73 и 83.

Комментарий. Только приведён пример, в котором на доске оказалось 6 простых чисел — 2 балла.

Доказано только, что больше шести простых чисел получить не могло — 5 баллов.

- 9.3. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, не обязательно с целыми коэффициентами. Известно, что при некоторых целых a и b разность $P(a) - P(b)$ является квадратом натурального числа. Докажите, что существует более миллиона таких пар целых чисел (c, d) , что разность $P(c) - P(d)$ также является квадратом натурального числа. (Н. Агаханов)

Решение. Пусть $P(x) = ux^2 + vx + w$. По условию,

$$(a - b)(u(a + b) + v) = (ua^2 + va + w) - (ub^2 + vb + w) =$$

$$= P(a) - P(b) = n^2.$$

Поскольку n — натуральное число, $a - b \neq 0$. Будем искать подходящие пары чисел (c, d) в виде $c = a + k$ и $d = b - k$. Тогда разность $P(c) - P(d)$ будет равна

$$(c - d)(u(c + d) + v) = (a - b + 2k)(u(a + b) + v) = \frac{a - b + 2k}{a - b} n^2.$$

Таким образом, нам достаточно подобрать такие k , для которых дробь $\frac{a - b + 2k}{a - b}$ будет квадратом натурального числа. При $k = (a - b)m$ дробь будет равна нечётному числу $2m + 1$. Тогда нам подойдут те m , при которых $2m + 1$ будет квадратом нечётного числа.

Замечание. Заметим, что у многочлена из условия некоторые (или даже все!) коэффициенты могут оказаться иррациональными. Например, условие выполнено для многочлена $P(x) = ux^2 + (1 - u)x - u$ и чисел $a = -1$, $b = 2$, где u — произвольное число.

Заметим, что если число u иррационально, то выражение

$P(c) - P(d)$ может оказаться целым *только* при $c + d = a + b$ или $c = d$.

Комментарий. В решении существенно используется, что коэффициенты многочлена рациональны — 0 баллов.

В решении высказана идея, что требуемые пары (c, d) надо искать с соблюдением условия $c + d = a + b - 2$ балла.

- 9.4. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B , то и B дружит с A). Оказалось, что среди каждых 100 человек в компании количество пар дружащих людей нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

(Е. Бакаев)

Ответ. 101.

Решение. Во всех решениях ниже мы рассматриваем граф дружб, в котором вершины — это люди в компании, а два человека соединены ребром, если они дружат.

Если граф — это цикл, содержащий 101 вершину, то на любых 100 вершинах ровно 99 рёбер, так что такая компания удовлетворяет условиям задачи. Осталось показать, что не существует такой компании из 102 человек (тогда и компании из более чем 102 человек тоже быть не может). Ниже мы приводим несколько различных способов сделать это; в каждом способе мы предполагаем, от противного, что такая компания нашлась.

Первое решение. Рассмотрим произвольное множество из 101 вершины и индуцированный подграф на этих вершинах, пусть в нём k рёбер. Выбрасывая из этого подграфа произвольную вершину (скажем, степени d), получаем 100 вершин с нечётным количеством рёбер $k - d$. Значит, степень любой вершины в нашем подграфе имеет чётность, отличную от чётности k , то есть степени всех вершин подграфа имеют одну и ту же чётность. Но, как хорошо известно, в графе из нечётного числа вершин все вершины не могут иметь нечётную степень. Поэтому все эти степени чётны, а число рёбер k нечётно.

Пусть теперь во всём графе на 102 вершинах ℓ рёбер. При выкидывании любой вершины (скажем, степени d) получается подграф с нечётным числом рёбер $\ell - d$; аналогично рассуждению выше получаем, что и во всём графе степени всех вершин имеют одинаковую чётность. Заметим, что наш граф не может

быть пустым (т.е. не иметь рёбер) или полным (т.е. иметь все C_{102}^2 рёбер), иначе на любых 100 вершинах будет либо 0, либо $C_{100}^2 = 99 \cdot 50$ рёбер, то есть чётное количество. Тогда найдётся вершина, соединённая хоть с какой-то другой вершиной, но не со всеми. Иначе говоря, есть вершины u , v_1 и v_2 такие, что u соединена с v_1 , но не с v_2 . Степени вершин v_1 и v_2 в исходном графе одной чётности, поэтому после удаления u они будут иметь разную чётность. Это невозможно по доказанному выше.

Второе решение. Существует всего $n = C_{102}^2 = 51 \cdot 101$ способов выбросить две вершины из 102, оставив 100. Пронумеруем эти способы числами от 1 до n . Пусть a_i — количество рёбер на оставшихся 100 вершинах в i -м способе; по предположению, все числа a_i нечётны, а значит, нечётна и их сумма S (поскольку число n нечётно).

С другой стороны, рассмотрим любое ребро uv . Это ребро учтено в числе a_i ровно тогда, когда вершины u и v не выброшены в i -м способе, то есть когда выброшена какая-то пара из оставшихся 100 вершин. Это происходит в $k = C_{100}^2 = 50 \cdot 99$ способах. Итак, каждое ребро учтено в S чётное количество k раз, поэтому S должно быть чётным. Противоречие.

Третье решение. Назовём вершину *чётной*, если её степень чётна, и *нечётной* иначе. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть общее количество рёбер в графе нечётно. Тогда, выкидывая любую пару вершин, мы должны выкинуть из графа чётное число рёбер (чтобы осталось нечётное число). С другой стороны, если мы выкидываем вершины со степенями d_1 и d_2 , то число выкинутых рёбер равно $d_1 + d_2$, если эти вершины не соединены ребром, и $d_1 + d_2 - 1$, если соединены. Отсюда следует, что вершины одинаковой чётности всегда не соединены ребром, а вершины разной чётности — всегда соединены.

Значит, если в графе k чётных вершин и ℓ нечётных, то чётные вершины имеют (чётную) степень ℓ , а нечётные — (нечётную) степень k . Это невозможно, ибо $k + \ell = 102$.

Случай 2. Пусть общее количество рёбер в графе чётно. Аналогично получаем, что вершины одинаковой чётности всегда соединены ребром, а вершины разной чётности не соединены. Поэтому, если в графе k чётных вершин и ℓ нечётных, то чётные

вершины имеют (чётную) степень $k-1$, а нечётные — (нечётную) степень $\ell-1$. Это опять же противоречит равенству $k+\ell=102$.

Замечание. Разумеется, существуют и другие примеры компании из 101 человека, удовлетворяющей условию.

Комментарий. Утверждение о том, что в любом графе чётное количество вершин нечётной степени, принимается без доказательства.

Только ответ — 0 баллов.

Только приведён пример компании из 101 человека, удовлетворяющей условию — 1 балл.

Замечено только, что для завершения решения достаточно показать, что в компании не может быть *ровно* 102 человека — баллы не добавляются. Если это соображение упущено в решении — баллы не снимаются.

Доказано только, что в компании не может быть 102 человек — 6 баллов.

Ниже перечислены некоторые продвижения в доказательстве этого факта. Баллы за разные продвижения *не складываются*; к ним может добавляться 1 балл за верный пример компании из 101 человека.

Доказано только, что в любой компании из 101 человек, удовлетворяющей условию, все степени вершин имеют одинаковую чётность — 2 балла.

Помимо этого, доказано, что во всей компании из 102 человек все вершины имеют одинаковую чётность — 4 балла.

Доказано, что граф — либо полный двудольный, либо объединение двух полных графов (как показано в третьем решении) — 4 балла.

Если один из вышеупомянутых случаев упущен (без достаточных на то оснований) — 3 балла вместо 4.

Разобран до конца лишь один из двух случаев из третьего решения — 4 балла.

- 9.5. Пусть CE — биссектриса в остроугольном треугольнике ABC . На внешней биссектрисе угла ACB отмечена точка D , а на стороне BC — точка F , причём $\angle BAD = 90^\circ = \angle DEF$. Докажи-

те, что центр окружности, описанной около треугольника CEF , лежит на прямой BD . (И. Фролов)

Решение. Во всех решениях ниже окружность, описанная около треугольника CEF , обозначается через ω , а её центр — через O .

Первое решение. Внешняя (CD) и внутренняя (CE) биссектрисы угла ACB перпендикулярны. Тогда $\angle DAE = \angle DCE = 90^\circ$, и четырёхугольник $ADCE$ вписан. Поэтому $\angle ADE = \angle ACE$, откуда $\angle BEF = 180^\circ - \angle AED - \angle DEF = 90^\circ - \angle AED = \angle ADE = \angle ACE = \angle ECF$. Значит, ω касается AB (в точке E ; см. рис. 1).

Выберем на отрезке BC такую точку P , что $PE \parallel AC$. Тогда $\angle PEC = \angle ECA = \angle PCE$, откуда $PC = PE$. Поскольку $OC = OE$, получаем, что PO — биссектриса внешнего угла BPE .

Совершим гомотегию с центром B , переводящую треугольник BPE в BCA . Тогда прямая PO перейдёт в CD , а прямая EO (перпендикулярная AB) — в AD . Значит, точка O перейдёт в D , откуда и следует, что точка O лежит на BD .

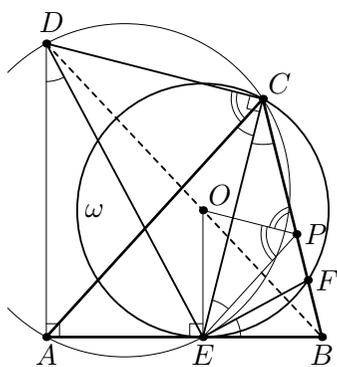


Рис. 1

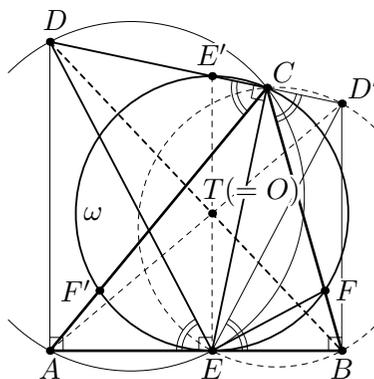


Рис. 2

Второе решение. Выберем на прямых CD и AC точки D' и F' так, что $\angle ABD' = \angle D'EF' = 90^\circ$ (см. рис. 2). Как и выше, докажем, что окружность ω касается AB . Аналогично, описанная окружность треугольника CEF' также касается AB в точке E (и тоже проходит через C). Поэтому эти окружности совпадают, то есть F' лежит на ω .

Докажем, что центром ω является точка T пересечения диа-

гоналей BD и AD' трапеции $ADD'B$. Заметим сразу, что из вписанных четырёхугольников $ADCE$ и $BD'CE$ получаются равенства $\angle AED = \angle ACD = \angle BCD' = \angle BED'$, так что прямоугольные треугольники AED и BED' подобны, и $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD'} = \frac{DT}{BT}$.

Значит, $ET \parallel AD \parallel BD'$.

Пусть TE пересекает DD' в точке E' . Поскольку E' лежит на диаметре ω , проходящем через E , и $\angle ECE' = 90^\circ$, точка E' лежит на ω . Прямая EE' параллельна основаниям трапеции и проходит через точку пересечения диагоналей трапеции; как известно, в этом случае EE' делится точкой T пополам. Поскольку EE' — диаметр ω , получаем $T = O$.

Замечание. После доказательства того, что ω касается AB в точке E , существуют и другие способы продолжения решения. Приведём набросок одного из них.

Нетрудно видеть, что $\angle CEF = \angle CAE = \mu$. Отметим на луче BD точку X так, что $\angle BCX = 90^\circ - \angle CEF = \angle DAC$; тогда $\angle XCD = \angle CDA = \nu$. Применяя теорему синусов, можно получить, что

$$\frac{BX}{XD} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{\cos \mu}{\sin \nu} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{CD}{CA} = \frac{BC}{CA} = \frac{BE}{EA}.$$

Таким образом, точка X лежит на прямых EO и CO , то есть $O = E$ (если эти две прямые не совпадают, то есть $AC \neq BC$).

Комментарий. Только замечено, что четырёхугольник $ADCE$ вписан — 0 баллов.

Показано что окружность ω касается AB — 1 балл.

Если в целом верное решение не работает при $AC = BC$ (как в замечании выше) — снимается 1 балл.