Материалы для проведения регионального этапа

XLVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2021–2022 учебный год

Второй день

4–5 февраля 2022 г.

Москва, 2022

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, А. С. Кузнецов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2021–2022 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **4 февраля 2022 г.** (I тур) и **5 февраля 2022 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2021–2022 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

11.6. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geqslant n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leqslant n \leqslant 2022$ и $1 \leqslant k \leqslant 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022}? (*Н. Агаханов*)

Ответ. $a_{2022} = 2022^3 - 1011^3 = 7 \cdot 1011^3$.

Решение. Записывая условие при $n = 2022$, $k = 1011$ и при $n = 1011$, $k = 2022$, получаем

$$a_{2022} = a_{2022} - a_{1011} \geqslant 2022^3 - 1011^3$$

и

$$-a_{2022} = a_{1011} - a_{2022} \geqslant 1011^3 - 2022^3,$$

то есть $a_{2022} \geqslant 2022^3 - 1011^3 \geqslant a_{2022}$. Отсюда и следует ответ.

Замечание. Последовательность, удовлетворяющая условию, существует, а именно $a_n = n^3 - 1011^3$. Более того, аналогично решению выше несложно показать, что такая последовательность единственна. Однако для решения задачи *не требуется* ни находить все такие последовательности, ни даже приводить пример такой последовательности.

Комментарий. Доказано, что $a_{2022} = 2022^3 - 1011^3$ — 7 баллов.

Доказано только, что $a_{2022} \leqslant 2022^3 - 1011^3$ (или только $a_{2022} \geqslant 2022^3 - 1011^3$) — 1 балл.

11.7. Произведение цифр натурального числа n равно x, а произведение цифр числа $n+1$ равно y. Может ли так случиться, что произведение цифр некоторого натурального числа m равно $y - 1$, а произведение цифр числа $m + 1$ равно $x - 1$? (*А. Кузнецов*)

Ответ. Не может.

Решение. Из условия следует, что $x, y \geqslant 1$, поскольку произведение цифр натурального числа не может быть отрицательным. Следовательно, числа n и $n + 1$ не содержат нулей в десятичной записи. Тогда эти числа отличаются лишь последней цифрой, причём у числа $n + 1$ она больше на один. Таким образом, $y > x$. Если $x - 1 > 0$, то, рассуждая аналогично, мы получим, что $y - 1 < x - 1$, это противоречит доказанному выше. Следовательно, $x - 1 = 0$. Тогда $x = 1$, и в десятичной записи числа n все цифры равны 1. Отсюда следует, что в числе $n + 2$

последняя цифра — двойка, а остальные цифры — единицы, поэтому $y = 2$. Значит, $y - 1 = 1$, и число m состоит лишь из единиц. Но тогда число $m + 1$ не содержит нулей в десятичной записи. Однако, произведение его цифр равно нулю, противоречие.

Комментарий. Доказано, что $x > y$ — 2 балла.

Доказано, что $x = 1$ (или что число n состоит только из единиц) — 2 балла.

11.8. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера $1, 2, \ldots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)? (*С. Берлов*)

Ответ. 50.

Решение. *Пример.* Фишку 50 последовательно 99 раз меняем со следующей против часовой стрелки. Получаем требуемое расположение.

Есть несколько способов доказать оценку, ниже мы приводим два из них.

Первый способ. Предположим, что при некотором $k < 50$ требуемая расстановка получена.

В каждый момент времени считаем *покрашенной* дугу от фишки 100 до фишки 1 по часовой стрелке. Так как фишки 100 и 1 нельзя поменять за один ход, каждая конкретная фишка m $(2 \leqslant m \leqslant 99)$ могла попасть на покрашенную дугу или покинуть покрашенную дугу только путём обмена с одной из фишек 1 или 100.

Поскольку изначально и в конце фишка m не была на покрашенной дуге, она сделала одинаковое количество *входов* на покрашенную дугу и *выходов* с покрашенной дуги. При $m \leqslant 50$ фишка m не могла меняться с фишкой 100, поэтому она могла делать *вход* или *выход* только путём обмена с фишкой 1. При *входе* фишка 1 совершает сдвиг на 1 по часовой стрелке, а при *выходе* — на 1 против часовой стрелки. Проведём аналогичные рассуждения для фишек $m \geqslant 51$, которые не могут меняться с фишкой 1.

Тем самым, мы получаем, что фишки 1 и 100 совершат одинаковый сдвиг по и против часовой стрелки, поэтому они останутся на своих позициях. Противоречие.

Второй способ. Будем считать сдвиги фишек относительно их начальной позиции, причём сдвиг по часовой стрелке будет считаться с плюсом, против часовой — с минусом. Тогда при обмене двух фишек к сдвигу одной из них прибавляется $+1$, а другой — -1. Значит, в результате проведенных операций сумма сдвигов будет равна 0.

Рассуждаем от противного: пусть при $k < 50$ каждая фишка i в итоге сдвинута на одну позицию по часовой стрелке, т.е. ее сдвиг оказался равным $1 + 100t_i$ (здесь t_i — целое «число оборотов» по часовой стрелке, в частности при $t_i < 0$ фишка i сделала $|t_i|$ оборотов против часовой стрелки). Тогда суммарный сдвиг всех 100 фишек равен $100(t_1 + t_2 + \ldots + t_{100}) + 100$. Поскольку он должен равняться 0, имеем $t_1 + t_2 + \ldots + t_{100} = -1$.

Поскольку $k < 50$, фишки с номерами i и j, где $j \geqslant i + 50$, не могли меняться местами, поэтому их сдвиги в любой момент заведомо отличаются меньше чем на 100, значит «количества оборотов» t_i и t_j равны при $j \geqslant i + 50$. Отсюда имеем $t_1 = t_{51}$, $t_2 = t_{52}$, $\ldots$, $t_{50} = t_{100}$. Тогда сумма $t_1 + t_2 + \ldots + t_{100} = 2(t_1 + t_2 + \ldots + t_{50})$ — четна, а значит не равна -1. Противоречие.

Замечание 1. Последнее рассуждение можно видоизменить следующим образом.

Отсюда $t_1 = t_{51}$, $t_1 = t_{52}$, $\ldots$, $t_1 = t_{100}$, $t_2 = t_{100}$, $t_3 = t_{100}$, $\ldots$, $t_{50} = t_{100}$, таким образом, все t_i равны t_1. Тогда $t_1 + t_2 + \ldots + t_{100} = 100t_1 \neq -1$.

Замечание 2. Завершить сведение к противоречию можно и по-другому, заменив последний абзац решения на такое рассуждение.

Поскрасим красным фишки, для которых $t_i \geqslant 0$, и синим — фишки, для которых $t_i < 0$. Ясно, что на каком-то ходе синяя и красная фишки должны будут поменяться, поскольку разность их сдвигов не менее 100. Поскольку $k < 50$, пара фишек 1 и 51

— одного цвета, аналогично пары фишек 1 и 52, ..., 1 и 100, 2 и 100, 3 и 100, ..., 50 и 100 — одного цвета. Таким образом, все фишки одного цвета. Мы знаем, что $t_1 + t_2 + \ldots + t_{100} = -1$, поэтому среди чисел $t_1, \ldots, t_{100}$ есть как неотрицательные, так и отрицательные, т.е. имеются как красные, так и синие фишки — противоречие.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Баллы за пример и оценку суммируются.

Приведён верный пример — 2 балла.

Есть полное доказательство оценки — 5 баллов.

При отсутствии полного доказательства оценки оцениваются следующие продвижения (баллы за продвижение (1) не суммируются с баллами за продвижения (2a), (2b), (2c), баллы за продвижения (2a), (2b), (2c) суммируются):

(1) Присутствует идея отслеживать принадлежность фишек дуге 100—1 (или взаимное расположение тройки фишек $1, m, 100$) — 2 балла.

(2a) рассмотрены сдвиги и показано, что сумма сдвигов равна 0 — 1 балл.

(2b) в предположении, что фишки в итоге сместились на 1 по часовой стрелке, записано равенство на сумму «количества оборотов» — 1 балл.

(2c) показано, что фишки с разным «количеством оборотов» или с «количеством оборотов» разного знака обязательно менялись местами на каком-то ходу — 1 балл.

11.9. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность ω. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Точка M — середина отрезка AB. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает окружность ω в точках K и L. Точка N — середина дуги CD описанной окружности треугольника PCD, не содержащей точку P. Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим через O центр окружности, описанной около трапеции $ABCD$. Тогда $\angle COD = 2\angle CAD = \angle PAD + \angle ADP = \angle CPD$. Здесь мы воспользовались тем, что центральный угол вдвое больше вписанного, и что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных.

Следовательно, точка O лежит на окружности γ, описанной около треугольника CPD, и поскольку $OC = OD$, то O — середина дуги CPD. Тогда отрезок ON — диаметр окружности γ, а прямая ON — серединный перпендикуляр к отрезку CD. В частности, середина отрезка CD, обозначим её через S, лежит на отрезке ON. Из сказанного выше, $\angle OCN = 90^\circ = \angle CSN$. Значит, окружность, описанная около треугольника SCN, касается прямой OC, поэтому $OS \cdot ON = OC^2 = OK \cdot OL$. Отметим точку S', симметричную точке S относительно точки O. Тогда $OK \cdot OL = OS' \cdot ON$, поэтому точки S', K, L, N лежат на одной окружности.

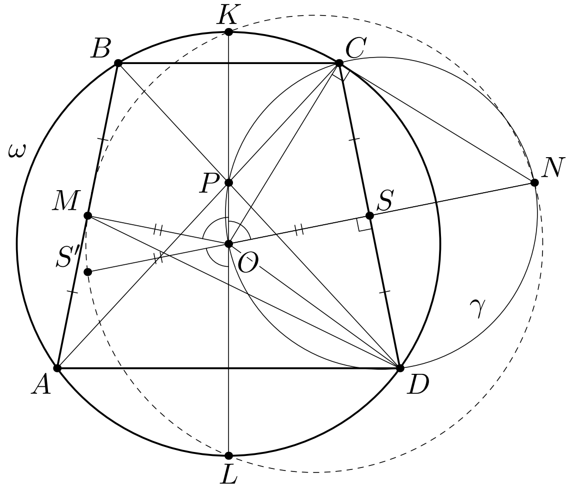

Рис. 3

Теперь заметим, что точки M и S симметричны относительно прямой KL. Значит, $OS' = OS = OM$ и $\angle LOS' = \angle KOS = \angle KOM$. Таким образом, точки M и S' симметричны относительно серединного перпендикуляра к KL. Следовательно, точки K, M, S' и L лежат на одной окружности. Из сказанного выше, на этой окружности лежит также и точка N, что и требовалось.

Комментарий. Доказано, что точка O лежит на описанной окружности треугольника CPD (или что ON — диаметр этой окружности) — 1 балл.

11.10. Даны неотрицательные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d = 8$.

Докажите, что
$$\frac{a^3}{a^2+b+c}+\frac{b^3}{b^2+c+d}+\frac{c^3}{c^2+d+a}+\frac{d^3}{d^2+a+b}\geqslant 4.$$
(*А. Кузнецов*)

Первое решение. Заметим, что
$$\frac{a^3}{a^2+b+c}=a-\frac{a(b+c)}{a^2+b+c}\geqslant a-\frac{a(b+c)}{2a\sqrt{b+c}}=a-\frac{\sqrt{b+c}}{2}\,.$$
Здесь мы оценили знаменатель по неравенству о средних:
$$a^2+b+c\geqslant 2a\sqrt{b+c}.$$
Сложим полученное неравенство с тремя аналогичными. Теперь нам достаточно доказать, что
$$a+b+c+d-\frac{\sqrt{a+b}}{2}-\frac{\sqrt{b+c}}{2}-\frac{\sqrt{c+d}}{2}-\frac{\sqrt{d+a}}{2}\geqslant 4.$$
Поскольку $a+b+c+d=8$, это равносильно неравенству
$$\frac{\sqrt{a+b}}{2}+\frac{\sqrt{b+c}}{2}+\frac{\sqrt{c+d}}{2}+\frac{\sqrt{d+a}}{2}\leqslant 4.$$

Но из неравенства между средним арифметическим и среднем квадратичным мы получаем, что
$$\frac{\sqrt{a+b}}{2}+\frac{\sqrt{c+d}}{2}\leqslant\sqrt{\frac{(\sqrt{a+b})^2+(\sqrt{c+d})^2}{2}}=2,$$
и, аналогично,
$$\frac{\sqrt{b+c}}{2}+\frac{\sqrt{d+a}}{2}\leqslant 2.$$
Складывая эти два неравенства, получаем требуемое.

Второе решение. По неравенству Коши-Буняковского-Шварца
$$\frac{a^3}{a^2+b+c}+\frac{b^3}{b^2+c+d}+\frac{c^3}{c^2+d+a}+\frac{d^3}{d^2+a+b}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{a(a^2+b+c)+b(b^2+c+d)+c(c^2+d+a)+d(d^2+a+b)}\,.$$

Таким образом, достаточно доказать, что
$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\geqslant 4(a^3+b^3+c^3+d^3+ab+bc+cd+da+2ac+2bd).$$

Заметим, что
$$32=\frac{(a+b+c+d)^2}{2}=$$

$$= ab + bc + cd + da + ac + bd + \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{b^2 + d^2}{2} \geqslant$$
$$\geqslant ab + bc + cd + da + 2ac + 2bd,$$

поэтому достаточно проверить, что

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \geqslant 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 32). \ (\star)$$

Сделаем замену

$$a = 2 + x,\ b = 2 + y,\ c = 2 + z,\ d = 2 + t.$$

Тогда

$$x + y + z + t = a + b + c + d - 8 = 0,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2(x + y + z + t) +$$
$$+ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 16 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2(x + y + z + t) +$$
$$+ 3 \cdot 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + x^3 + y^3 + x^3 + t^3.$$

Неравенство $(\star)$ примет вид

$$\left((x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 16\right)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4\left(x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + 6(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 64\right).$$

После раскрытия сокращения остаётся доказать, что

$$(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 + 8(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \geqslant 4(x^3 + y^3 + z^3 + t^3).$$

Остаётся заметить, что

$$(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 + 8(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \geqslant$$
$$\geqslant x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4(x^3 + y^3 + z^3 + t^3).$$

Первое неравенство получается раскрытием скобок: после сокращения в левой его части остаются лишь неотрицательные слагаемые. Второе получается сложением четырёх неравенств о средних вида $p^4 + 4p^2 \geqslant 4p^3$.

Комментарий. Оценка каждой дроби (как в первом решении) — 4 балла.

Применено неравенство Коши-Буняковского-Шварца (как во втором решении) — 1 балл.

Исходное неравенство сведено к неравенству $(\star)$ — 3 балла.
Баллы за указанные продвижения не суммируются.