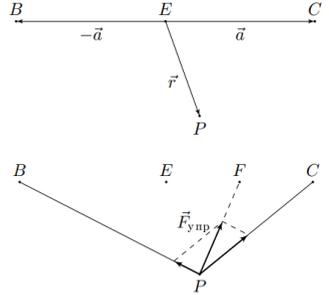


Задача №11-1. Две резинки

Найдём равнодействующая сил упругости, действующих на шайбу при её произвольном положении. Обозначим положение шайбы точкой P , середину отрезка BC – точкой E . Также обозначим векторы $\vec{EP} = \vec{r}$, $\vec{EC} = \vec{a}$ (рис.1.)

Тогда удлинения резинок равны длинам отрезков BP и CP , а равнодействующая сил упругости:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k(\vec{r} + \vec{a}) - 3k(\vec{r} - \vec{a}) = -4k \left(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} \right)$$



Таким образом, равнодействующая сила всегда направлена к точке F , являющейся серединой отрезка EC (рис.2), и пропорциональна расстоянию до неё от точки P с коэффициентом жёсткости $4k$. Следовательно, всё движение шайбы будет происходить по прямой OF , как если бы она находилась под воздействием пружины с коэффициентом жесткости $4k$ и имела положение равновесия в точке F .

Задача свелась к исследованию движения по прямой в присутствии сухого трения. Длина отрезка OF равна $l_0 = \frac{L\sqrt{5}}{2}$, начальное значение силы упругости $F_0 = 2\sqrt{5}kL$. Если максимальная сила трения покоя превышает её, то есть $\mu mg \geq 2\sqrt{5}kL$ - шайба не начнет движение, и её скорость останется равной 0. В противном случае шайба придет в движение, для описания которого введем ось x с началом в точке F , направленную к точке O . Уравнение движения шайбы от момента начала движения до момента первой остановки шайбы:

$$ma_x = -4kx + \mu mg$$

заменой $x' = x - \frac{\mu mg}{4k}$ приводится к уравнению гармонических колебаний

$$ma'_x = -4kx'$$

с нулевой начальной скоростью и начальным отклонением от «смещенного» положения равновесия $l_1 = l_0 - \frac{\mu mg}{4k}$. Тогда ясно, что максимальная скорость шайбы достигается при прохождении «смещенного» положения равновесия и определяется из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{4kl_1^2}{2} \Rightarrow v_{max} = 2l_1 \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5k}{m}}L - \frac{\mu g}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

После этого момента времени скорость шайбы будет уменьшаться вплоть до остановки, после которой нам снова нужно будет сравнивать силу упругости пружины с максимальной величиной силы трения (чтобы выяснить, начнется ли возвратное движение шайбы). Но в любом случае, поскольку механическая энергия системы убывает за счет работы силы трения, максимумы скорости на новых полупериодах движения будут меньше уже найденного.

Как было показано при решении первого пункта, при $\mu mg < 2\sqrt{5}kL$ максимальная скорость движения шайбы достигается в её положении равновесия, т.е. через четверть периода колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}$ после старта. При $\mu mg \geq 2\sqrt{5}kL$ - движение не начнётся.

Задача №11-2. Цилиндр и клапан

При заполнении цилиндра снаружи внутрь перемещается позиция воздуха объёма V_1 при атмосферном давлении и температуре T_0 (рис.1.)

Внутри воздух находится при давлении $p_0 - \Delta p$. Закон сохранения энергии для этой порции учетом работы сил атмосферного давления $A_{\text{внеш1}} = p_0 V_1$ и работы газа внутри цилиндра при перемещении поршня $A_{\text{газ1}} = (p_0 - \Delta p)V_0$ выглядит так:

$$\frac{5p_0 V_1}{2} + p_0 V_1 - (p_0 - \Delta p)V_0 = \frac{5(p_0 - \Delta p)V_0}{2}.$$

Отсюда:

$$V_1 = \frac{p_0 - \Delta p}{p_0} V_0 = \frac{2V_0}{3}.$$

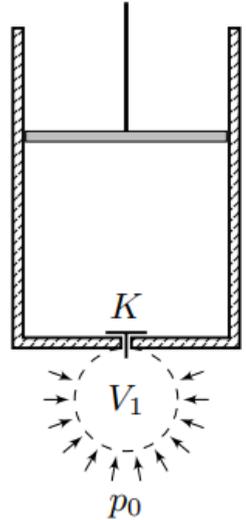
Из уравнения состояния можно определить температуру воздуха внутри цилиндра T_1 :

$$\frac{p_0 V_1}{T_0} = \frac{(p_0 - \Delta p)V_0}{T_1},$$

откуда

$$T_1 = T_0.$$

Итак, температура воздуха в цилиндре после заполнения равна T_0 . После освобождения поршня он совершает колебания, которые затухают из-за вязкого трения в газе. Пусть после остановки поршня объём воздуха под ним равен $V_0 - \Delta V_1$.



Работа внешнего давления над поршнем равна $p_0\Delta V_1$. Закон сохранения энергии:

$$\frac{5(p_0 - \Delta p)V_0}{2} + p_0\Delta V_1 = \frac{5p_0(V_0 - \Delta V_1)}{2}.$$

Отсюда:

$$\Delta V_1 = \frac{5\Delta p}{7p_0}V_0 = \frac{5V_0}{21}.$$

Из уравнения состояния

$$\frac{(p_0 - \Delta p)V_0}{T_1} = \frac{p_0(V_0 - \Delta V_1)}{T_2}.$$

Отсюда:

$$T_2 = \frac{8T_0}{7}.$$

Отличие от первого случая состоит в том, что воздуха в цилиндре в процессе перемещения поршня нет и работа газа над поршнем $A_{\text{газ2}}$ равна нулю. Закон сохранения энергии

$$\frac{5p_0V_2}{2} + p_0V_2 = \frac{5(p_0 - \Delta p)V_0}{2},$$

откуда:

$$V_2 = \frac{5(p_0 - \Delta p)}{7p_0}V_0 = \frac{10V_0}{21}.$$

Здесь V_2 – объем порции газа, переходящий снаружи в цилиндр, при p_0 и T_0 . При использовании уравнения состояния получим

$$T_1' = \frac{(p_0 - \Delta p)V_0}{p_0V_2},$$

или:

$$T_1' = \frac{7T_0}{5}.$$

После освобождения поршня аналогично первому случаю

$$\Delta V_2 = \frac{5\Delta p}{7p_0} = \frac{5p_0}{21}.$$

Уравнение состояния дает:

$$T_2' = \frac{8T_1'}{7},$$

откуда:

$$T'_2 = \frac{8T_0}{5}$$

Задача №11-3. Колебания заряда

Из теоремы Гаусса напряженность электрического поля заряженной цилиндрической поверхности определяется формулой

$$E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r},$$

где r – расстояние от оси трубы. При натянутой прямой нити шарик находится на дуге окружности радиуса R с центром в точке крепления нити. Если нить составляет угол α с вертикалью, расстояние от конца нити до оси цилиндра $r = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$. Напряженность электрического поля в точке, где находится шарик, равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Возможны два типа положений равновесия: либо нить вертикальна, либо нить наклонена под некоторым углом к вертикали. Рассмотрим возможные значения заряда в каждом из этих случаев. Поскольку в начальном состоянии нить не была натянута, шарик должен оказаться в устойчивом положении равновесия. Сколь угодно малые отклонения от неустойчивого положения равновесия приведут к тому, что шарик перейдет в другое положение равновесия.

Рассмотрим сначала случай, когда нить расположена вертикально, $\alpha = 0$. Тогда сила натяжения нити равна $T = qE - mg = \frac{\sigma q}{2\varepsilon_0} - mg$. Это положение равновесия возможно, если $T > 0$, то есть

$$\sigma q > 2\varepsilon_0 mg.$$

Исследуем его устойчивость. Пусть нить отклонится от вертикали на малый угол φ . Проекция силы на ось x , которая перпендикулярна текущему направлению нити, равна

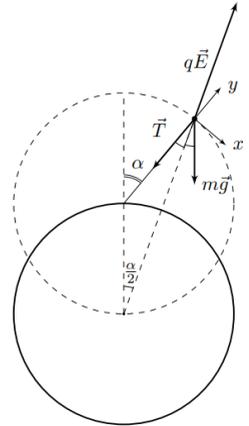
$$F_x = mg \sin \varphi - qE \sin \frac{\varphi}{2} \approx \left(mg - \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0} \right) \varphi.$$

Положение равновесия будет устойчивым, если при отклонении нити на малый угол возникающая сила будет стремиться вернуть ее назад, то есть при $\varphi > 0$ должно быть $F_x < 0$, а значит условие устойчивости

$$\sigma q > 4\varepsilon_0 mg,$$

и при вертикальной нити возможны только такие значения заряда.

Рассмотрим теперь случай, когда нить отклонена на угол $0 < \alpha \leq 90^\circ$ от вертикали. Тогда электрическое поле в точке, где находится шарик, направлено под углом $\alpha/2$ к вертикали. Покажем действующие на шарик силы. При равновесии силы \vec{T} , $m\vec{g}$, и $q\vec{E}$ образуют треугольник. К тому же они параллельны сторонам треугольника образованного нитью, отрезком от точки на оси цилиндра до точки крепления нити и отрезка от точки на оси цилиндра до шарика. Поэтому эти три вектора сил образуют равнобедренный треугольник, подобный треугольнику со сторонами R , R , и r , откуда находим:



$$T = mg \quad \text{и} \quad \frac{qE}{r} = \frac{mg}{R}.$$

Отсюда:

$$q\sigma = 4\varepsilon_0 mg \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

В этом случае проекция силы на ось x :

$$F_x = mg \sin \alpha - qE \sin \frac{\alpha}{2} = mg \sin \alpha - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \tan \frac{\alpha}{2}.$$

В положении равновесия эта сила равна нулю, откуда можно получить прежнее выражение для σq . Вблизи положения равновесия, когда угол отклонения нити от вертикали равен $\alpha + \varphi$ ($\varphi \ll 1$), сила имеет вид

$$\begin{aligned} F_x &= - \left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) - mg \sin \alpha \right)' \varphi = \\ &= - \left(\frac{q\sigma}{4\varepsilon_0 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)} - mg \cos \alpha \right) \varphi = -mg(1 - \cos \alpha)\varphi, \end{aligned}$$

поскольку $q\sigma = 4\varepsilon_0 mg \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Коэффициент перед угловым отклонением отрицателен, поэтому положение равновесия устойчиво.

Модуль заряда шарика уменьшается с возрастанием угла α . Максимальное значение угла α , соответствующее условию задачи: $\alpha_{max} = 90^\circ$, достигается при наименьшей величине модуля заряда шарика $|q_1| = \frac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}$. В этом случае векторы сил образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Это значение заряда меньше значения, при котором вертикальное положение равновесия становится устойчивым. Поэтому минимальному значению заряда отвечает горизонтальное положение нити.

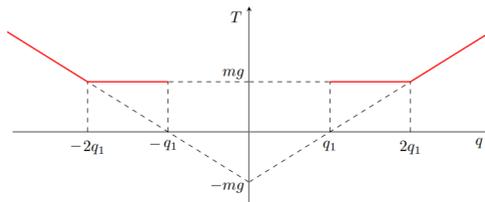
Таким образом, при $q_1 \leq |q| < 2q_1$ есть устойчивое положение равновесия с нитью, расположенной под некоторым углом к вертикали, а при $|q| \geq 2q_1$ устойчиво вертикальное положение нити. Окончательно ответ на первый вопрос:

$$|q| \geq \frac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|}.$$

Будем плавно увеличивать модуль заряда от q_1 . При достаточно малых значениях заряда устойчивым будет наклонное положение нити, а угол α будет уменьшаться с увеличением заряда. При этом сила натяжения нити постоянна и равна mg . Когда модуль заряда достигнет значения $q_2 = 2q_1$, нить расположится вертикально. Если продолжить увеличивать модуль заряда от q_2 , то вертикальное положение нити будет сохраняться и сила натяжения нити будет линейно расти с зарядом:

$$T = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} - mg.$$

Строим график, состоящий из горизонтального прямого отрезка и наклонного луча. Учитывая, что знак заряда может быть как положительным, так и отрицательным, часть графика, расположенная в первом квадранте соответствует случаю $\sigma > 0$, а расположенная во втором - $\sigma < 0$.



При $\frac{q\sigma}{\varepsilon_0 mg} \geq 4$ устойчиво положение равновесия $\alpha = 0^\circ$, а при $2 < \frac{q\sigma}{\varepsilon_0 mg} < 4$ устойчиво равновесие с $\alpha_2 = \arccos\left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg} - 1\right)$. Для случая $\alpha_1 = 0^\circ$ при отклонении шарика на малый угол φ от положения равновесия возникает возвращающая сила, проекция которой на ось x , перпендикулярную нити равна:

$$F_x = -\left(\frac{q\sigma}{4\varepsilon_0} - mg\right) \sin \varphi.$$

Проекция ускорения шарика $a_x = R\ddot{\varphi}$. С учетом малости φ получаем уравнение гармонических колебаний:

$$mR\ddot{\varphi} = -\left(\frac{q\sigma}{4\varepsilon_0} - mg\right) \varphi.$$

Циклическая частота в этом случае

$$\omega_1^2 = \frac{q\sigma}{4mR\varepsilon_0} - \frac{g}{R}.$$

Рассмотрим гармонические колебания для второго положения устойчивого равновесия. В этом случае возвращающая сила

$$F_x = -mg(1 - \cos \alpha)\varphi,$$

Подставляя $\cos \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$ в уравнение $ma_x = F_x$, получим:

$$mR\ddot{\varphi} = -2\left(mg - \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\right) \varphi.$$

Окончательно для циклической частоты:

$$\omega_2^2 = \frac{2g}{R} - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mR}.$$

Ответ для периодов колебаний:

$$T = \begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{4mR\varepsilon_0}{q\sigma - 4mg\varepsilon_0}} & \text{при } |q| > \frac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2mR\varepsilon_0}{4mg\varepsilon_0 - q\sigma}} & \text{при } \frac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \leq |q| < \frac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \end{cases}$$

Альтернативное решение

Поскольку потенциал поля цилиндра $\varphi = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$ - потенциальная энергия заряда равна:

$$W_p = -\frac{q\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + mgR \cos \alpha = mgR \left(\cos \alpha - \frac{q\sigma}{mg\varepsilon_0} \ln\left(2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \right)$$

Положения равновесия определяются из условия $U' = 0$ (производная по углу здесь и далее обозначается штрихом), т.е

$$U' = mgR \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\sigma q}{2mg\varepsilon_0} - 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \Rightarrow \alpha_1 = 0^\circ \quad \alpha_2 = \arccos\left(\frac{q\sigma}{2mg\varepsilon_0} - 1\right)$$

Для второй производной имеем:

$$U'' = mgR \left(\frac{q\sigma}{2mg\varepsilon_0(1 + \cos \alpha)} - \cos \alpha \right)$$

Последняя доказывает, что положение равновесия 1 устойчиво ($U'' > 0$) при $q > \frac{4\varepsilon_0 mg}{\sigma}$, а положение равновесия 2 с ненулевым α существует при

$$\frac{2\varepsilon_0 mg}{\sigma} \leq q < \frac{4\varepsilon_0 mg}{\sigma}.$$

Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{mR^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{U'' \varphi^2}{2} = E$$

откуда найдём:

$$\omega^2 = \frac{U''}{mR^2}$$

Тогда циклические частоты принимают следующие значения:

$$\omega_1^2 = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0 mR} - \frac{g}{R} \quad \text{и} \quad \omega_2^2 = \frac{2g}{R} - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mR}$$

Случай $q = \frac{4\varepsilon_0 mg}{\sigma}$ является критическим. Для $\alpha \ll 1$ имеем:

$$W_p \approx mgR \left(1 - \ln(2) + \frac{\alpha^4}{16} + o(\alpha^6) \right)$$

В критическом случае равновесие является устойчивым, однако колебания являются ангармоническими!

$$T = \begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{4mR\varepsilon_0}{q\sigma - 4mg\varepsilon_0}} & \text{при } |q| > \frac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2mR\varepsilon_0}{4mg\varepsilon_0 - q\sigma}} & \text{при } \frac{2\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \leq |q| < \frac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \\ \text{Ангармонические колебания} & \text{при } |q| = \frac{4\varepsilon_0 mg}{|\sigma|} \end{cases}$$

Задача №11-4. Соленоид и виток

Первое решение

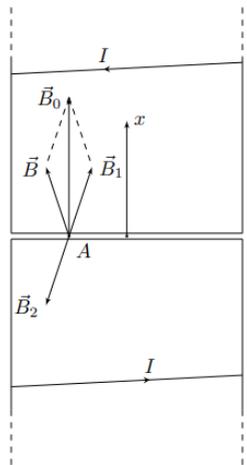
Добавим к исходному соленоиду такой же, дополнив его до бесконечного. Обозначим магнитные поля исходного и добавленного соленоидов за \vec{B} и \vec{B}_1 соответственно. Если направление силы тока в добавленном соленоиде изменить на противоположное, то и создаваемое им магнитное поле \vec{B}_2 изменится на противоположное, т.е. $\vec{B}_2 = -\vec{B}_1$. Добавленный соленоид с изменённым на противоположное направлением силы тока симметричен исходному относительно основания, поэтому создаваемые добавленным и исходным соленоидами магнитные поля \vec{B}_2 и \vec{B} соответственно будут также симметричны относительно основания.

Рассмотрим в точки, принадлежащие основанию. На рис.1 показаны исходный соленоид и добавленный с противоположным направлением тока. Поскольку внутри соленоида магнитное поле \vec{B}_0 однородно, имеем:

$$B_x + B_{1x} = B_0.$$

Также, поскольку магнитные поля \vec{B} и \vec{B}_2 симметричны относительно основания, имеем:

$$B_x + B_{2x} = 0.$$



Комбинируя полученные равенства, находим:

$$B_x = B_{1x} = \frac{B_0}{2}.$$

Таким образом, в исходной ситуации в точке A проекция магнитного поля на ось x равна:

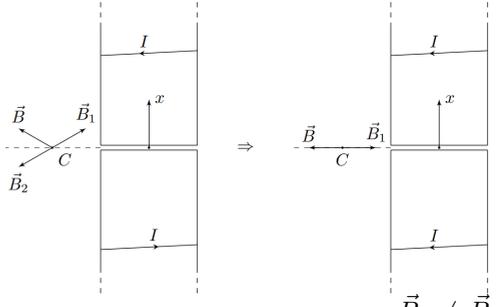
$$B_{Ax} = \frac{\mu_0 n I}{2}.$$

Рассмотрим в плоскости основания точки, не принадлежащие ему. Поскольку магнитное поле вне бесконечного соленоида равно нулю:

$$\vec{B} + \vec{B}_1 = 0.$$

Тогда $\vec{B}_2 = -\vec{B}_1 = \vec{B}$. Поскольку векторы \vec{B} и \vec{B}_2 симметричны относительно основания – в рассматриваемых точках магнитное поле направлено в плоскости основания, иначе $\vec{B}_2 \neq \vec{B}$ (см.рис.2.) Таким образом, в исходной ситуации в точке C проекция магнитного поля на ось x равна:

$$B_{Cx} = 0.$$



Второе решение

Второй вариант рассуждений может быть построен на использовании теоремы о телесном угле для магнитного поля. Если по плоскому слою течёт ток линейной плотностью \vec{i} , то в точке O компонента магнитного поля, направленная вдоль слоя перпендикулярно \vec{i} , равна:

$$B_{O\parallel} = \frac{\mu_0 i \Omega_O}{4\pi},$$

где Ω_O – телесный угол, под которым виден слой из точки O . Применяя теорему о телесном угле к осевой компоненте магнитного поля соленоида, получим:

$$B_x = \frac{\mu_0 n I \Omega_{\text{бок}}}{4\pi},$$

где $\Omega_{\text{бок}}$ – телесный угол, под которым видна боковая поверхность соленоида (с учётом знака, данная величина может быть и отрицательна). Отметим, что утверждения, данные в примечании к условию задачи, могут быть получены с помощью этой теоремы. В точках, принадлежащих основанию, боковая поверхность соленоида видна под телесным углом $\Omega_{\text{бок}} = 2\pi$, а в точках, лежащих в плоскости основания и не принадлежащих ему, боковая поверхность соленоида видна под нулевым телесным углом. Отсюда получим ответы:

$$B_{Ax} = \frac{\mu_0 n I}{2} \quad B_{Cx} = 0.$$

Поскольку виток сверхпроводящий, магнитный поток, пронизывающий его, должен оставаться постоянным и равным нулю. Пусть Φ_c – магнитный поток через виток от соленоида. Выберем положительное направление силы тока в витке такое, как и в соленоиде, тогда:

$$\Phi_c + LI_B = 0.$$

Как было показано в п.1, осевая компонента магнитного поля в плоскости витка на расстояниях меньших r постоянна и равна $\frac{B_0}{2}$, а на расстояниях больших r равна нулю. Поэтому поток магнитного поля соленоида через виток равен $\Phi_c = \frac{B_0 S}{2}$, где S – площадь основания соленоида. С учетом $S = \pi r^2$, находим:

$$\Phi_c = \frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2},$$

и получаем ответ на второй вопрос:

$$I_B = -\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2L}$$

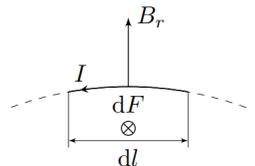
(ток в витке направлен против тока в обмотке соленоида).

Первое решение

Сила взаимодействия витка с соленоидом направлена вдоль их общей оси.

Пусть B_r – компонента магнитного поля витка, направленная перпендикулярно боковой поверхности соленоида. Рассмотрим элемент тока соленоида длины dl . Будем искать силу притяжения витка к соленоиду. Осевая компонента силы Ампера, действующей на него, равна:

$$dF_{1x} = -IB_r dl.$$



В толщине слоя dh находится $dN = ndh$ витков, а сила, действующая на них равна:

$$dF_x = dF_{1x}dN = -InB_r dldh.$$

Отметим, что $dldh = dS_{\text{бок}}$ – элемент площади боковой поверхности соленоида. Тогда выражение для элемента силы можно переписать в виде:

$$dF_x = -Ind\Phi_{\text{бок}},$$

где $\Phi_{\text{бок}}$ – поток магнитного поля витка через боковую поверхность соленоида. Равнодействующая сила равна:

$$F_x = -In\Phi_{\text{бок}}.$$

Для нахождения $\Phi_{\text{бок}}$ воспользуемся теоремой Гаусса для магнитного поля: через любую замкнутую поверхность поток магнитного поля равен нулю. Тогда имеем:

$$\Phi_{\text{бок}} + \Phi_{\text{осн}} = 0,$$

где $\Phi_{\text{осн}}$ – поток магнитного поля витка через основание соленоида. Поскольку $r \ll R$, магнитное поле витка в ближнем основании соленоида можно считать однородным и равным:

$$B_{\text{в.х}} = \frac{\mu_0 I_{\text{в}}}{2R}.$$

Также, поскольку соленоид полубесконечный, в дальнем основании соленоида магнитное поле витка равняется нулю. Тогда для $\Phi_{\text{осн}}$ имеем:

$$\Phi_{\text{осн}} = B_{\text{в.х}}S = \frac{\mu_0 I_{\text{в}}S}{2R},$$

откуда находим:

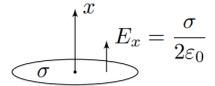
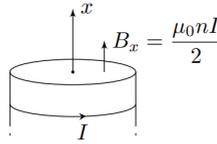
$$F_x = -\frac{1}{RL} \left(\frac{\pi\mu_0 n I r^2}{2} \right)^2$$

Соленоид и виток отталкиваются. *Примечание:* Отметим, что метод решения, использующий силу, действующую на виток с током в неоднородном магнитном поле, эквивалентен решению, описанному выше.

Второе решение

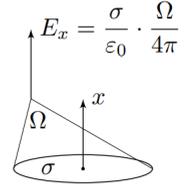
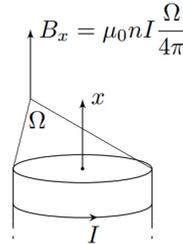
На больших ($R \gg r$) расстояниях от основания полубесконечного соленоида источник магнитного потока $\Phi_0 = B_0 S$ – ближний торец соленоида – выглядит практически точечным, и магнитный поток от него растекается практически равномерно по всем направлениям. Покажем это.

В соответствии с п.1 в основании соленоида проекция на ось x создаваемого им магнитного поля постоянна и равна $B_x = \frac{\mu_0 n I}{2}$. Изменение магнитного поля вне соленоида описывается теоремой Гаусса, а также теоремой о циркуляции для магнитного поля.



Поскольку токи вне соленоида отсутствуют, циркуляция магнитного поля по любому замкнутому контуру, не пересекающему поверхность соленоида, равна нулю. Теми же уравнениями описывается электрическое поле тонкого диска, заряженного по поверхности с плотностью заряда σ . Действительно, проекция на ось x электрического поля диска на его поверхности постоянна и равна $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Поскольку вне диска электрические заряды отсутствуют, поток электрического поля через любую поверхность, не пересекающую плоскость диска, равен нулю. Циркуляция электрического поля по любому замкнутому контуру также равна нулю.

В частности, убедимся в эквивалентности формул для B_x и E_x вне соленоида (рис.5.)

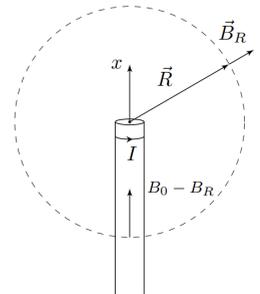


В соответствии с аналогией структур магнитного поля полубесконечного соленоида и электрического поля равномерно заряженного диска, на расстоянии $R \gg r$ от основания соленоида магнитное поле соленоида направленно вдоль линии, соединяющей рассматриваемую точку с основанием и равняется:

$$B_R = \frac{\mu_0 n I r^2}{4 R^2}.$$

Отметим, что изложенный вывод не противоречит теореме Гаусса для магнитного поля. Действительно, из теоремы о телесном угле для магнитного поля следует, что разность проекций магнитного поля внутри и вне соленоида на ось x равна B_0 . Применяя теорему Гаусса для сферической поверхности радиуса $R \gg r$ с центром в центре основания (см.рис.6), получим:

$$4\pi R^2 B_R = \Phi_0 = \pi r^2 B_0,$$



что совпадает с полученным из аналогии результатом.

Результирующая сила отталкивания, действующая на виток со стороны соленоида, равна:

$$F_{\text{в}x} = -2\pi R I_{\text{в}} B_R = \frac{1}{RL} \left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2} \right)^2,$$

откуда в соответствии с третьим законом Ньютона получим:

$$F_x = -\frac{1}{RL} \left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2} \right)^2.$$

Третье решение

Задача также допускает энергетическое решение. Обозначим взаимную индуктивность соленоида и витка за $L_{\text{в}3} = \frac{\Phi_{\text{с}}}{I}$. В рассматриваемом положении она равна $\frac{\mu_0 n S}{2}$. Если обозначить индуктивность соленоида L_1 , то энергия системы равна

$$E = \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L I_{\text{в}}^2}{2} + L_{\text{в}3} I I_{\text{в}},$$

или, с учетом соотношения $L_{\text{в}3} I + L I_{\text{в}} = 0$:

$$E = \frac{L_1 I^2}{2} - \frac{L_{\text{в}3}^2 I^2}{2L}.$$

Изменение энергии системы равняется:

$$dE = -\frac{I^2 L_{\text{в}3} dL_{\text{в}3}}{L}.$$

При движении соленоида в нём возникает ЭДС индукции. Поскольку сила тока в соленоиде остаётся постоянной, источник, подключенный к соленоиду, компенсирует ЭДС индукции, а значит совершает работу. Поток магнитного поля витка через соленоид равен

$$\Phi_2 = L_{\text{в}3} I_{\text{в}} = -\frac{L_{\text{в}3}^2 I}{L},$$

поэтому работа источника равна:

$$dA_{\text{ист}} = -\int_0^t \mathcal{E}_{\text{инд}} I dt = I d\Phi_2 = -\frac{2I^2 L_{\text{в}3} dL_{\text{в}3}}{L} = -2dE.$$

Пусть F_x – сила, действующая на соленоид со стороны витка. Тогда внешняя сила, действующая на соленоид для поддержания его в равновесии равна $-F_x$. При сдвиге соленоида на dx изменение энергии системы равно

$$dA_{\text{ист}} - F_x dx = dE,$$

откуда

$$F_x = \frac{dE}{dx} = -\frac{I^2 L_{\text{вз}}}{L} \frac{dL_{\text{вз}}}{dx}.$$

Найдём изменение взаимной индуктивности $dL_{\text{вз}}$ при сдвиге соленоида на расстояние dx вдоль оси симметрии. Сдвиг эквивалентен наращиванию еще $dN = ndx$ витков соленоида вблизи торца. Тогда сверхпроводящий виток начинает создавать дополнительный поток $d\Phi_1 = B_{\text{вз}} S dN$ через соленоид, а значит, изменение $L_{\text{вз}}$ составит

$$dL_{\text{вз}} = d\left(\frac{\Phi_1}{I_{\text{в}}}\right) = \frac{\mu_0 S n dx}{2R}.$$

В последнем выражении мы воспользовались магнитным полем витка в его центре. Подставляя $L_{\text{вз}}$ и $dL_{\text{вз}}$ в выражение для F_x , находим:

$$F_x = -\frac{1}{RL} \left(\frac{\pi\mu_0 n I r^2}{2}\right)^2.$$

Четвёртое решение

Поиск работы источника можно обойти, замкнув подводящие к соленоиду провода накоротко. Тогда поток магнитного поля $\Phi = \left(L_1 - \frac{L_{\text{вз}}^2}{L}\right) I$, пронизывающего соленоид, сохраняется при его перемещении. Для энергии магнитного поля получим:

$$E = \frac{\Phi^2}{2\left(L_1 - \frac{L_{\text{вз}}^2}{L}\right)}.$$

При перемещении соленоида изменение энергии системы равняется

$$dE = \frac{\Phi^2}{\left(L_1 - \frac{L_{\text{вз}}^2}{L}\right)^2} \frac{L_{\text{вз}} dL_{\text{вз}}}{L} = \frac{I^2 L_{\text{вз}} dL_{\text{вз}}}{L}.$$

Тогда для силы, действующей на соленоид со стороны витка, получим:

$$F_x = -\frac{dE}{dx} = -\frac{I^2 L_{\text{вз}}}{L} \frac{dL_{\text{вз}}}{dx}.$$

Подставляя $L_{\text{вз}}$ и $dL_{\text{вз}}$ (см. третье решение) в выражение для F_x , находим:

$$F_x = -\frac{1}{RL} \left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2} \right)^2.$$

Задача №11-5. Нелинейный элемент и конденсатор

Из второго закона Кирхгофа для цепи следует:

$$U_0 = IR + U_1 + \frac{A}{I},$$

откуда:

$$I^2 R - (U_0 - U_1)I + A = 0.$$

Для существования корней квадратного уравнения его дискриминант должен быть неотрицательным. Учитывая, что $I > 0$, получим:

$$U_0 \geq U_1 + 2\sqrt{AR}$$

Из второго закона Кирхгофа для цепи получим:

$$U_0 = IR + U_1 + \frac{A}{I} + U_C,$$

откуда:

$$U_C = U_0 - U_1 - IR + \frac{A}{I}.$$

Пусть $I_1 \approx 9,6$ мА – сила тока в цепи в точке 1. Тогда:

$$I_1^2 R - I_1(U_0 - U_1) + A = 0.$$

Пусть $U_{\text{max}} \approx 6$ В – максимальное напряжение на конденсаторе, а $I_2 \approx 2$ мА – соответствующая ему сила тока в цепи. Максимум напряжения на конденсаторе соответствует минимуму выражения $IR + \frac{A}{I}$, достигающемуся при равенстве слагаемых, т.е

$$I_2 = \sqrt{\frac{A}{R}}.$$

Для U_{max} находим:

$$U_{max} = U_0 - U_1 - 2\sqrt{AR}$$

Подставив $U_0 - U_1 = U_{max} + 2\sqrt{AR}$ в уравнение относительно I_1 , получим:

$$I_1^2 R - I_1 U_{max} - 2I_1 \sqrt{AR} + A = 0.$$

Выражая A из уравнения относительно I_2 :

$$(I_1 - I_2)^2 R = I_1 U_{max}$$

Получим ответы:

$$R = \frac{I_1 U_{max}}{(I_1 - I_2)^2} \approx 997 \text{ Ом} \quad A = \frac{I_1 I_2^2 U_{max}}{(I_1 - I_2)^2} \approx 3,99 \text{ мВт}$$

$$U_0 = U_1 + U_{max} + \frac{2I_1 I_2 U_{max}}{(I_1 - I_2)^2} \approx 11,99 \text{ В}$$

Перейдём к количеству теплоты, выделившемуся на резисторе. За малый промежуток времени Δt :

$$\Delta Q_R = I^2 R \Delta t = RI \Delta q_C = RC I \Delta U_C \Rightarrow Q_R = RCS$$

где S – площадь под графиком $I(U_C)$ в процессе зарядки конденсатора.

Первое решение

Найдём S непосредственным вычислением, проведя касательную к графику в точке 1, а затем из площади трапеции вычтем площадь области между касательной и графиком. Получим:

$$S \approx (37,1 - 38,3) \text{ мВт}$$

откуда:

$$Q_R = (370 - 383) \text{ мДж}$$

Второе решение

Данный результат может быть получен аналитически. Для этого заметим, что:

$$Q_R = RC \int_0^{U_{max}} I dU_C = RC \left(I_2 U_{max} + \int_{I_2}^{I_1} U_C dI \right)$$

Подставим зависимость $U_C(I)$ в подынтегральное выражение и получим:

$$Q_R = RC \left(I_2 U_{max} + \int_{I_2}^{I_1} \left(U_0 - U_1 - IR + \frac{A}{I} \right) dI \right)$$

Интегрируя, находим:

$$Q_R = RC \left(I_2 U_{max} + (U_0 - U_1)(I_1 - I_2) - \frac{R(I_1^2 - I_2^2)}{2} - A \ln \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \right)$$

$$Q_R \approx (376 - 377) \text{ мДж}$$

Первое решение

Запишем закон сохранения энергии в системе:

$$A_{ист} = Q_R + Q_{H.Э} + W_C,$$

где Q_R и $Q_{H.Э}$ – количества теплоты, выделившиеся на резисторе и нелинейном элементе соответственно. Работа источника и энергия конденсатора равны соответственно:

$$A_{ист} = U_0 q_C = CU_0 U_{max} \quad W_C = \frac{CU_{max}^2}{2}$$

Рассмотрим малый промежуток времени dt . За это время на нелинейном элементе выделилось количество теплоты $dQ_{H.Э}$, равное:

$$dQ_{H.Э} = U_{H.Э} Idt = U_1 Idt + Adt = U_1 dq_C + Adt \Rightarrow Q_{H.Э} = CU_1 U_{max} + A\tau$$

Окончательно получим:

$$\tau = \frac{C}{A} \left((U_0 - U_1)U_{max} - RS - \frac{U_{max}^2}{2} \right) \approx 10,9 \pm 1,6 \text{ с}$$

Основная погрешность результата связана с определением S графическим способом.

Второе решение

Время τ можно также найти из дифференциального уравнения процесса зарядки конденсатора. Решая квадратное уравнение относительно I получим:

$$I = \frac{(U_0 - U_1 - U_C) \pm \sqrt{(U_0 - U_1 - U_C)^2 - 4AR}}{2R}$$

Графику зависимости $U_C(I)$ соответствует корень со знаком $+$. Введём переменную $V = U_0 - U_1 - U_C$. Тогда:

$$I = \frac{V + \sqrt{V^2 - 4AR}}{2R}$$

Рассмотрим процесс зарядки конденсатора:

$$\frac{dq_C}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} = -C \frac{dV}{dt} = I$$

откуда:

$$dt = -2RC \frac{dV}{V + \sqrt{V^2 - 4AR}}$$

Избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$dt = -\frac{C}{2A} \left(V - \sqrt{V^2 - 4AR} \right) dV$$

С учётом выражения для U_{max} , получим выражение для τ :

$$\tau = \frac{C}{2A} \int_{\frac{U_0 - U_1}{2\sqrt{AR}}}^{U_0 - U_1} \left(V - \sqrt{V^2 - 4AR} \right) dV$$

Сразу вычислим первый интеграл:

$$\int_{\frac{U_0 - U_1}{2\sqrt{AR}}}^{U_0 - U_1} V dV = \frac{(U_0 - U_1)^2 - 4AR}{2}$$

Для вычисления второго интеграла введём переменную $x = \frac{V}{2\sqrt{AR}}$ и получим:

$$\int_{\frac{U_0 - U_1}{2\sqrt{AR}}}^{U_0 - U_1} \sqrt{V^2 - 4AR} dV = 4AR \int_1^{\frac{U_0 - U_1}{2\sqrt{AR}}} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

Рассматриваемый интеграл является табличным и равен:

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2} + C$$

откуда:

$$4AR \int_1^{\frac{U_0 - U_1}{2\sqrt{AR}}} \sqrt{x^2 - 1} dx =$$

$$= \frac{(U_0 - U_1)\sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR} - 4AR \ln\left(\frac{U_0 - U_1 + \sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR}}{2\sqrt{AR}}\right)}{2} \quad (1)$$

Для τ окончательно имеем:

$$\tau = \frac{C}{4A} \left[(U_0 - U_1)^2 - 4AR - (U_0 - U_1)\sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR} + \right.$$

$$\left. + 4AR \ln\left(\frac{U_0 - U_1 + \sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR}}{2\sqrt{AR}}\right) \right] \approx 10,9 \text{ с} \quad (2)$$

Задача Ru22-11-T1. Две резинки
Шифр

$\Sigma =$

| | Пункт разбалловки | Балл | Наличие |
|------|--|------|---------|
| 1.1 | Определено положение равновесия без учёта силы трения. | 1.00 | |
| 1.2 | Показано, что результирующая сила упругости всегда направлена к положению равновесия. | 2.00 | |
| 1.3 | Найден эффективный коэффициент жёсткости $k_{\text{эфф}} = 4k$. | 1.00 | |
| 1.4 | Получены условия, при которых шайба не начнёт движение. $\mu mg \geq 2\sqrt{5kL}$. | 0.50 | |
| 1.5 | Утверждение о прямолинейности движения (есть утверждения о начальной нулевой скорости и постоянстве направления вектора результирующей силы). | 1.00 | |
| 1.6 | Утверждение о прямолинейности движения (без утверждения о нулевой начальной скорости) | 0.50 | |
| 1.7 | Максимум скорости достигается при нулевом ускорении (или аналогичное утверждение) | 0.50 | |
| 1.8 | Определено положение тела в момент достижения максимальной скорости. $x_0 = \frac{\mu mg}{4k}$. | 1.00 | |
| 1.9 | Закон изменения энергии для нахождения максимальной скорости. | 1.00 | |
| 1.10 | Определена максимальная скорость. $v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{5k}{m}L - \frac{\mu g}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}$. | 1.00 | |
| 2.1 | Показано, что движение до смещённого положения равновесия описывается законом гармонического колебания. | 0.50 | |
| 2.2 | Определена циклическая частота таких колебаний (или соответствующий ей период). $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$ или $T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. | 1.00 | |
| 2.3 | Утверждение о том, что время достижения максимальной скорости равно четверти периода таких колебаний. | 0.50 | |
| 2.4 | $\tau = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}$. | 1.00 | |

Задача Ru22-11-Т2. Цилиндр и клапан
Шифр

$\Sigma =$

| | Пункт разбалловки | Балл | Наличие |
|-----|---|------|---------|
| 1.1 | Найдена работа газа в цилиндре, совершаемая при перемещении поршня. | 1.00 | |
| 1.2 | Найдена работа внешней среды над газом при «вдавливании» газа через клапан. | 1.00 | |
| 1.3 | Записано первое начало термодинамики от момента начала подъема поршня до момента его остановки. | 1.00 | |
| 1.4 | Записано уравнение для равенства количества вещества, вошедшего и вышедшего через клапан. Количество вещества выражено через параметры состояния. | 0.50 | |
| 1.5 | Получена температура после остановки поршня ($T_1 = T_0$). | 1.00 | |
| 1.6 | Записано первое начало термодинамики от момента после освобождения поршня до конечного равновесия. | 1.50 | |
| 1.8 | Температура после установления равновесия выражена через T_1 ($T_2 = 8T_1/7$). | 0.50 | |
| 1.9 | Получена температура после установления равновесия ($T_2 = 8T_0/7$). | 0.50 | |
| 2.1 | Отмечено в решении, что газ после прохода через клапан работы не совершает. | 0.50 | |
| 2.2 | Найдена работа внешней среды над газом при «вдавливании» газа через клапан или отмечено, что она такая же, как в первой части. | 0.50 | |
| 2.3 | Записано первое начало термодинамики от момента начала входа газа через клапан и до момента заполнения цилиндра. | 1.00 | |
| 2.4 | Записано уравнение для равенства количества вещества, вошедшего и вышедшего через клапан. Количество вещества выражено через параметры состояния. | 0.50 | |
| 2.5 | Получена температура после заполнения цилиндра ($T'_1 = 7T_0/5$). | 0.50 | |
| 2.6 | Записано первое начало термодинамики от момента после освобождения поршня до конечного равновесия. | 1.00 | |
| 2.7 | Температура после установления равновесия выражена через T'_1 ($T'_2 = 8T'_1/7$). | 0.50 | |
| 2.8 | Получена температура после установления равновесия ($T'_2 = 8T_0/5$). | 0.50 | |

Задача Ru22-11-Т3. Колебания заряда
Шифр

$\Sigma =$

| | Пункт разбалловки | Балл | Наличие |
|-----|---|--------|---------|
| 1.2 | Найдено или записано в явном виде выражение для напряженности электрического поля трубы (цилиндра) $E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$ | 1.00 | |
| 1.3 | Отмечено или рассмотрено в решении два различных положения равновесия (вертикальное и наклонное) | 0.50 | |
| 1.4 | Записано условие равновесия заряда для вертикального расположения нити | 0.50 | |
| 1.5 | Получен диапазон значений для вертикального расположения нити $ q \geq \frac{2\varepsilon_0 mg}{ \sigma }$ | 0.50 | |
| 1.6 | Записано условие равновесия заряда для наклонного расположения нити | 0.50 | |
| 1.7 | Получено выражение $q\sigma = 4\varepsilon_0 mg \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ | 0.50 | |
| 1.8 | Получен диапазон значений для наклонного расположения нити $\frac{4\varepsilon_0 mg}{ \sigma } > q \geq \frac{2\varepsilon_0 mg}{ \sigma }$ | 0.50 | |
| 2.1 | Найдено значение силы натяжения при наклонном расположении нити | 0.50 | |
| 2.2 | Найдено значение силы натяжения при вертикальном расположении нити | 0.50 | |
| 2.3 | В работе упоминается устойчивость положения(ий) равновесия | 0.25 | |
| 2.4 | Найдены границы устойчивости вертикального и наклонного положения равновесия | 2×0.50 | |
| 2.5 | На графике правильно отображены оба участка (по 0.5 балла за каждый). | 2×0.50 | |
| 2.6 | На графике подписаны граничные величины: q_1 , q_2 и mg (по 0.25 балла за каждый). | 3×0.25 | |
| 3.1 | Рассмотрено положение равновесия $\alpha = 0$. Приведено выражение для возвращающей силы при малых отклонениях | 0.50 | |
| 3.2 | Верно записано уравнение колебаний (в случае арифметической ошибки без нарушения размерности ставить 0,5 балла) | 2×0.50 | |
| 3.3 | Найдено значение периода колебаний | 0.50 | |
| 3.4 | Если циклическая частота найдена верно, но период колебаний не записан в явном виде. | -0.25 | |
| 3.5 | Рассмотрены положения равновесия $\alpha = \pm \arccos\left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg} - 1\right)$. Приведено выражение для возвращающей силы при малых отклонениях | 0.50 | |
| 3.6 | Верно записано уравнение колебаний (в случае арифметической ошибки без нарушения размерности ставить 0,5 балла) | 2×0.50 | |
| 3.7 | Найдено значение периода колебаний | 0.50 | |
| 3.8 | Если циклическая частота найдена верно, но период колебаний не записан в явном виде. | -0.25 | |

Задача Ru22-11-Т4. Соленоид и виток
Шифр

$\Sigma =$

| | Пункт разбалловки | Балл | Наличие |
|------|---|------|---------|
| 1.1 | M1 Идея дополнения исходного соленоида до бесконечного. | 0.50 | |
| 1.3 | M1 Корректные рассуждения о симметрии магнитных полей \vec{B} и \vec{B}_2 относительно основания. (Если равенство B_x и B_{1x} используется без доказательства - пункт не оценивается). | 1.50 | |
| 1.4 | M1 Найдена проекция магнитного поля в точке A : $B_{Ax} = \frac{\mu_0 n I}{2}.$ (При некорректных рассуждениях пункт не оценивается). | 0.50 | |
| 1.5 | M1 Найдена проекция магнитного поля в точке C : $B_{Cx} = 0.$ (При некорректных рассуждениях пункт не оценивается). | 0.50 | |
| 1.6 | M2 Записана теорема параллельной компоненте магнитного поля плоского слоя: $B_{O } = \frac{\mu_0 n I \Omega_O}{4\pi}.$ | 1.20 | |
| 1.7 | M2 Телесный угол в точках, принадлежащих основанию, равен: $\Omega_{\text{осн}} = 2\pi.$ | 0.30 | |
| 1.8 | M2 Телесный угол в точках, лежащих в плоскости основания и не принадлежащих ему, равен нулю. | 0.50 | |
| 1.9 | M2 Найдена проекция магнитного поля в точке A : $B_{Ax} = \frac{\mu_0 n I}{2}.$ | 0.50 | |
| 1.10 | M2 Найдена проекция магнитного поля в точке C : $B_{Cx} = 0.$ | 0.50 | |
| 2.1 | Записано условие равенства нулю потока через виток: $\Phi_c + LI_b = 0.$ | 1.00 | |
| 2.2 | Показано, что поток магнитного поля соленоида через виток равен: $\Phi_c = \frac{B_0 S}{2}.$ (Оценивается, если в работе явно указано, что $B_{Ax} = \frac{B_0}{2}$ и $B_{Cx} = 0$, или верно применена теорема о взаимной индуктивности). | 1.00 | |
| 2.3 | Найдена силы тока в витке: $I_b = -\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2L}.$ | 1.00 | |
| 2.4 | Найдена только величина силы тока в витке | 0.50 | |
| 2.5 | Найдено только направление силы тока в витке | 0.50 | |

| | | | |
|------|--|------|--|
| 3.1 | <p>M1 Получено выражение для осевой компоненты силы Ампера, действующей на элементы dl витков соленоида, находящиеся в слое толщины dh:</p> $dF_x = -InB_r dldh.$ | 0.50 | |
| 3.2 | <p>M1 Выражения для силы магнитного взаимодействия через поток магнитного поля витка через боковую поверхность соленоида:</p> $F_x = -In\Phi_{бок}.$ | 2.00 | |
| 3.3 | <p>M1 Из теоремы Гаусса для магнитного поля получено:</p> $\Phi_{бок} + \Phi_{осн} = 0.$ | 1.00 | |
| 3.4 | <p>M1 Указано, что магнитное поле витка в основании соленоида можно считать однородным и равным:</p> $B_{вх} = \frac{\mu_0 I_B}{2R}.$ <p>(Пункт также оценивается, если магнитное поле витка с током найдено для произвольной точки оси.)</p> | 1.00 | |
| 3.9 | <p>M2 Сила, действующая на соленоид, выражена через его магнитное поле на расстоянии R от оси:</p> $F_x = 2\pi R B_R I_B.$ <p>(балл ставится даже при ошибке в знаке).</p> | 1.00 | |
| 3.10 | <p>M2 Указано, что на расстояниях $\rho \gg r$ от основания магнитное поле соленоида приближённо описывается полем магнитного монополя.</p> | 1.00 | |
| 3.11 | <p>M2 Найдена величина "магнитного заряда":</p> $M = nIS$ | 1.00 | |
| 3.12 | <p>M2 Получено выражение для магнитного поля соленоида на расстоянии R от основания:</p> $B_R = \frac{B_0 r^2}{4R^2}.$ | 1.50 | |
| 3.16 | <p>M3 Записано выражение для энергии системы:</p> $E = \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L I_B^2}{2} + L_{в3} I I_B.$ | 0.50 | |
| 3.17 | <p>M3 С учётом равенства нулю потока через виток, выражение для энергии системы приведено к следующей форме:</p> $E = \frac{L_1 I^2}{2} - \frac{L_{в3}^2 I^2}{2L}.$ | 0.50 | |
| 3.18 | <p>M3 Изменение энергии системы при постоянной силе тока в соленоиде выражено через изменение взаимной индуктивности:</p> $dE = -\frac{L_{в3} I^2}{L} \frac{dL_{в3}}{dx}.$ | 0.50 | |
| 3.19 | <p>M3 Работа источника, поддерживающего при перемещении соленоида силу тока в нём постоянной, выражено через изменение взаимной индуктивности:</p> $dA_{ист} = -\frac{2L_{в3} I^2}{L} \frac{dL_{в3}}{dx}.$ | 1.00 | |

| | | | |
|------|--|------|--|
| 3.20 | <p>M3 Записан закон изменения энергии системы:</p> $dA_{\text{ист}} - F_x dx = dE.$ | 0.50 | |
| 3.21 | <p>M3 Указано, что магнитное поле витка в основании соленоида можно считать однородным и равным:</p> $B_{\text{вх}} = \frac{\mu_0 I_{\text{в}}}{2R}.$ | 1.00 | |
| 3.22 | <p>M3 Найдено изменение взаимной индуктивности $dL_{\text{вз}}$ при сдвиге соленоида на dx:</p> $dL_{\text{вз}} = \frac{\mu_0 S n dx}{2R}.$ | 0.50 | |
| 3.25 | <p>M4 Записано выражение для энергии системы:</p> $E = \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L I_{\text{в}}^2}{2} + L_{\text{вз}} I I_{\text{в}}.$ | 0.50 | |
| 3.26 | <p>M4 С учётом равенства нулю потока через виток, выражение для энергии системы приведено к следующей форме:</p> $E = \frac{L_1 I^2}{2} - \frac{L_{\text{вз}}^2 I^2}{2L}.$ | 0.50 | |
| 3.27 | <p>M4 Указано, что при замыкании накоротко проводов, подводящих к соленоиду, поток, пронизывающий его, будет сохраняться.</p> | 0.50 | |
| 3.28 | <p>M4 С учётом постоянства потока, пронизывающего соленоид, выражение для энергии приведено к виду:</p> $E = \frac{\Phi^2}{2 \left(L_1 - \frac{L_{\text{вз}}^2}{L} \right)}.$ | 0.50 | |
| 3.29 | <p>M4 Изменение энергии системы при постоянном потоке, пронизывающем соленоид, выражено через изменение взаимной индуктивности:</p> $dE = \frac{I^2 L_{\text{вз}} dL_{\text{вз}}}{L}.$ | 0.50 | |
| 3.30 | <p>M4 Записан закон изменения энергии в системе:</p> $F_x = - \frac{dE}{dx}.$ | 0.50 | |
| 3.31 | <p>M4 Указано, что магнитное поле витка в основании соленоида можно считать однородным и равным:</p> $B_{\text{вх}} = \frac{\mu_0 I_{\text{в}}}{2R}.$ | 1.00 | |
| 3.32 | <p>M4 Найдено изменение взаимной индуктивности $dL_{\text{вз}}$ при сдвиге соленоида на dx:</p> $dL_{\text{вз}} = \frac{\mu_0 S n dx}{2R}.$ | 0.50 | |
| 3.33 | <p>Найдена сила магнитного взаимодействия, действующей на соленоид со стороны витка:</p> $F_x = - \frac{1}{RL} \left(\frac{\pi \mu_0 n I r^2}{2} \right)^2.$ <p>(При некорректных рассуждениях пункт не оценивается).</p> | 1.50 | |

| | | | |
|------|---|------|--|
| 3.34 | Найдена только величина силы взаимодействия. (При некорректных рассуждениях пункт не оценивается). | 1.00 | |
| 3.35 | Найдено только направление силы взаимодействия. (При некорректных рассуждениях пункт не оценивается). | 0.50 | |

Задача Ru22-11-T5. Нелинейный элемент и конденсатор
Шифр

$\Sigma =$

| | Пункт разбалловки | Балл | Наличие |
|-----|--|--------|---------|
| 1.1 | Получено квадратное уравнение относительно силы тока I : $I^2 R - I(U_0 - U_1) + A = 0.$ | 0.30 | |
| 1.2 | Указано, что дискриминант квадратного уравнения неотрицателен. | 0.40 | |
| 1.3 | Указано, что $U_0 > U_1$, поскольку $I > 0$. | 0.30 | |
| 1.4 | Найдены все значения U_0 , при которых в цепи протекает электрический ток: $U_0 \geq U_1 + 2\sqrt{AR}.$ | 0.50 | |
| 2.1 | Получена зависимость напряжения конденсатора U_C от силы тока I : $U_C = U_0 - U_1 - IR - \frac{A}{I}.$ | 0.30 | |
| 2.2 | Получено уравнение относительно $I_1 \approx 9,6$ мА для момента начала тока: $I_1^2 R - I_1(U_0 - U_1) + A = 0.$ | 0.50 | |
| 2.3 | Получено выражение для силы тока $I_2 \approx 2$ мА, соответствующей максимальному напряжению на конденсаторе $U_{max} \approx 6$ В: $I_2 = \sqrt{\frac{A}{R}}.$ | 0.70 | |
| 2.4 | Получено выражение для U_{max} : $U_{max} = U_0 - U_1 - 2\sqrt{AR}.$ | 0.50 | |
| 2.5 | Найдены численные значения (по 0.5 балла за каждое): $U_0 \approx 12 \text{ В} \quad R \approx 1 \text{ кОм} \quad A \approx 4 \text{ мВт}.$ | 3×0.50 | 0 |
| 3.1 | M1 Получено выражение для выделившегося на резисторе количества теплоты Q_R : $Q_R = RC \int_0^{U_{max}} IdU_C.$ | 1.00 | |
| 3.2 | M1 Величина $\int_0^{U_{max}} IdU_C = S$ определена с помощью графика: (37,5 – 37,9) мВт - 1,5 балла; (37,3 – 38,1) мВт - 1 балл; (37,1 – 38,3) мВт - 0,5 балла. | 3×0.50 | 0 |
| 3.4 | M2 Формула для Q_R преобразована к виду: $Q_R = RC \left(I_2 U_{max} + \int_{I_2}^{I_1} U_C dI \right).$ | 1.00 | |
| 3.5 | M2 Выражение для Q_R через известные величины: $Q_R = RC \left(I_2 U_{max} + (U_0 - U_1)(I_1 - I_2) - \frac{R(I_1^2 - I_2^2)}{2} - A \ln \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \right).$ | 1.50 | |

| | | | |
|------|---|--------|---|
| 3.6 | Получено численное значение Q_R : $Q_R = (370 - 382) \text{ мДж.}$ | 0.50 | |
| 4.1 | M1 Записан закон изменения энергии в системе: $A_{\text{ист}} = Q_R + Q_{\text{н.э}} + W_C.$ | 0.50 | |
| 4.2 | M1 Получено выражение для работы источника: $A_{\text{ист}} = CU_0U_{\text{max}}.$ | 0.30 | |
| 4.3 | M1 Получено выражение для энергии конденсатора: $W_C = \frac{CU_{\text{max}}^2}{2}.$ | 0.20 | |
| 4.4 | M1 Получено выражение для количества теплоты $Q_{\text{н.э}}$, выделившегося на нелинейном элементе: $Q_{\text{н.э}} = CU_1U_{\text{max}} + A\tau.$ | 1.00 | |
| 4.5 | M1 Получено выражение для времени протекания электрического тока в цепи: $\tau = \frac{1}{A} \left(C(U_0 - U_1)U_{\text{max}} - \frac{CU_{\text{max}}^2}{2} - Q_R \right).$ | 0.50 | |
| 4.6 | M1 Найдено численное значение τ : (10, 2 – 11, 4) с – 1,5 балла; (9, 7 – 11, 9) с – 1 балл; (9, 2 – 12, 4) с – 0,5 балла. | 3×0.50 | 0 |
| 4.7 | M2 Решено квадратное уравнение относительно I : $I = \frac{(U_0 - U_1 - U_C) \pm \sqrt{(U_0 - U_1 - U_C)^2 - 4AR}}{2R}$ | 0.20 | |
| 4.8 | M2 Выбор корня со знаком +. | 0.10 | |
| 4.9 | M2 Получена связь промежутка времени dt и изменения напряжения на конденсаторе $dU_C = -dV$: $dt = -\frac{C}{2A} \left(V - \sqrt{V^2 - 4AR} \right) dV$ | 0.30 | |
| 4.10 | M2 Получено выражение для τ : $\tau = \frac{C}{2A} \int_{2\sqrt{AR}}^{U_0 - U_1} \left(V - \sqrt{V^2 - 4AR} \right) dV$ | 0.40 | |
| 4.11 | M2 Получена формула для τ через известные величины: $\tau = \frac{C \left((U_0 - U_1)^2 - 4AR - (U_0 - U_1) \sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR} + 4AR \ln \left(\frac{U_0 - U_1 + \sqrt{(U_0 - U_1)^2 - 4AR}}{2\sqrt{AR}} \right) \right)}{4A}$ | 0.50 | |
| 4.12 | M2 Найдено численное значение τ : $\tau = (10,7 - 10,9) \text{ с}$ | 0.50 | |