

9 класс

Второй день

- 9.5. Дана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, \dots , в которой нет двух равных членов. Отрезок $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+m-1}$ этой последовательности назовём *монотонным отрезком длины m* , если выполнены неравенства $a_i < a_{i+1} < \dots < a_{i+m-1}$ или неравенства $a_i > a_{i+1} > \dots > a_{i+m-1}$. Оказалось, что для каждого натурального k член a_k содержится в некотором монотонном отрезке длины $k + 1$. Докажите, что существует натуральное N такое, что последовательность a_N, a_{N+1}, \dots монотонна, т. е. $a_N < a_{N+1} < \dots$ или $a_N > a_{N+1} > \dots$.
- 9.6. Для какого наименьшего натурального числа a существуют целые числа b и c такие, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных положительных корня, не превосходящих $\frac{1}{1000}$?
- 9.7. В стране 998 городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Согласно закону, между любой парой городов должно быть не больше одного рейса. Другой закон требует, чтобы для любой группы городов было не больше $5k + 10$ рейсов, соединяющих два города этой группы, где k — количество городов в группе. В настоящий момент законы соблюдены. Докажите, что министерство развития может ввести несколько новых рейсов так, чтобы законы по-прежнему соблюдались, а общее количество рейсов в стране стало равным 5000.
- 9.8. В треугольник ABC вписана окружность ω , касающаяся стороны BC в точке K . Окружность ω' симметрична окружности ω относительно точки A . Точка A_0 выбрана так, что отрезки BA_0 и CA_0 касаются ω' . Пусть M — середина стороны BC . Докажите, что прямая AM делит отрезок KA_0 пополам.