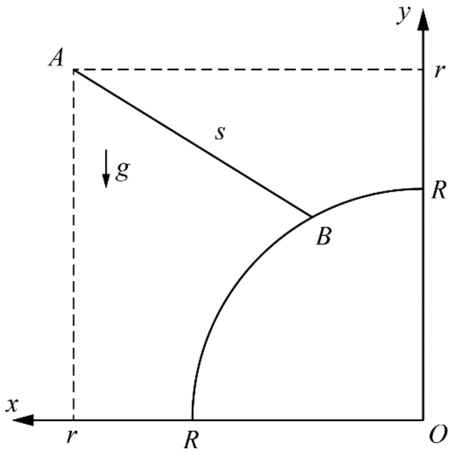
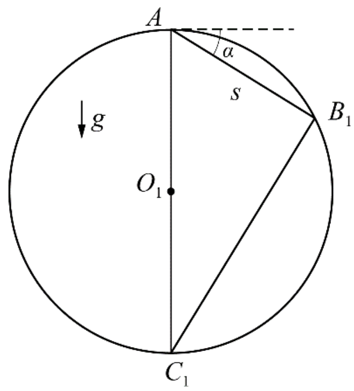
Задача 2.10.1. Жёлоб (13 баллов). Шарик движется по гладкому жёлобу, расположенному в вертикальной плоскости, из точки A без начальной скорости. Жёлоб соединяет фиксированную. точку A, имеющую координаты (r; r), с некоторой точкой B, лежащей на дуге окружности радиуса R с центром в точке O (0; 0). При некотором положении точки B время движения шарика на участке AB оказывается минимально возможным (в процессе движения шарика точка B не перемещается). Определите, чему равно это минимальное время t. Ускорение свободного падения g.



Возможное решение (А. Уймин). Найдём геометрическое место точек в которых шарик может оказаться в момент времени t. Пусть α – угол, который составляет желоб с горизонтом. Из второго закона Ньютона ускорение шарика будет равно $a = g\sin\alpha$.

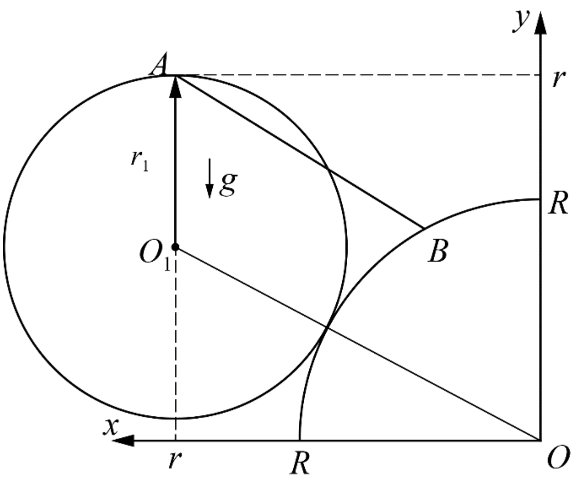
Пройденное шариком расстояние $s = \frac{at^2}{2} = \frac{g\sin\alpha \cdot t^2}{2}$. Отсюда следует, что $\frac{s}{\sin\alpha} = \frac{g \cdot t^2}{2}$.

То есть для всех точек, в которых может оказаться шарик спустя время t, величина $s/\sin\alpha$ будет одинаковой.



Покажем, что все эти точки лежат на окружности, центр которой лежит строго под точкой A, а сама окружность проходит через точку A.

Построим такую окружность для одного из возможных положений желоба. Из геометрии $\angle AB_1C_1 = 90^\circ$ (как вписанный, опирающийся на диаметр), тогда $\angle B_1C_1A = \alpha$, и $AC_1 = \frac{s}{\sin\alpha} = \frac{g \cdot t^2}{2} = 2r_1$, где r_1 – радиус нарисованной нами окружности. Получается, что радиус такой окружности не зависит от угла наклона жёлоба.



В таком случае, время спуска шарика будет минимальным, когда нарисованная нами окружность коснётся дуги радиуса R.

Выразим расстояние OO_1 двумя способами.

$$(OO_1)^2 = (R + r_1)^2 = r^2 + (r - r_1)^2,$$

откуда $r_1 = \frac{2r^2 - R^2}{2(r+R)}$.

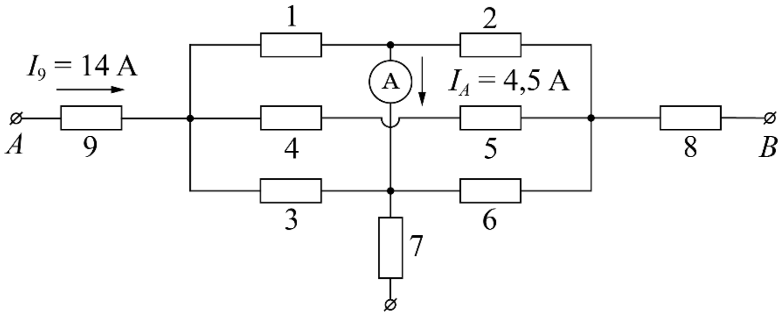
Ранее мы показали, что $r_1 = \frac{g \cdot t^2}{4}$, значит $t = \sqrt{\frac{4r_1}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}\frac{(2r^2 - R^2)}{(r+R)}}$.

№	**Задача 2.10.1. Критерии оценивания (13 баллов)**	**Баллы**
1	Найдено ускорение движения по жёлобу	2
2	Доказано, что множество точек, задающих возможное положение шарика в произвольный момент времени, представляет окружность; либо из кинематики получено уравнение, связывающее время движения шарика до дуги окружности с углом наклона жёлоба к горизонту	4
3	Указано, что минимальное время соответствует касанию окружностей; Либо указано правильное условие минимальности для кинематического уравнения (производная времени по углу равна нулю)	2
4	Получено значение угла наклона жёлоба или длины желоба, соответствующих минимальному времени	2
5	Найдено минимальное время.	3

Задача 2.10.2. Разветвлённая цепь (12 баллов). На рисунке представлена часть разветвлённой электрической цепи, включающей девять резисторов и идеальный амперметр. Сопротивления резисторов равны: $R_1 = 1{,}0$ Ом, $R_2 = 2{,}0$ Ом, … $R_9 = 9{,}0$ Ом, (на рисунке приведены номера резисторов).

Сила токов, протекающих через R_9 и амперметр известны: $I_9 = 14$ А, $I_A = 4{,}5$ А, их направления указаны на рисунке.

Определите силы токов, протекающих через резисторы R_7 и R_8, а также напряжение между точками A и B.

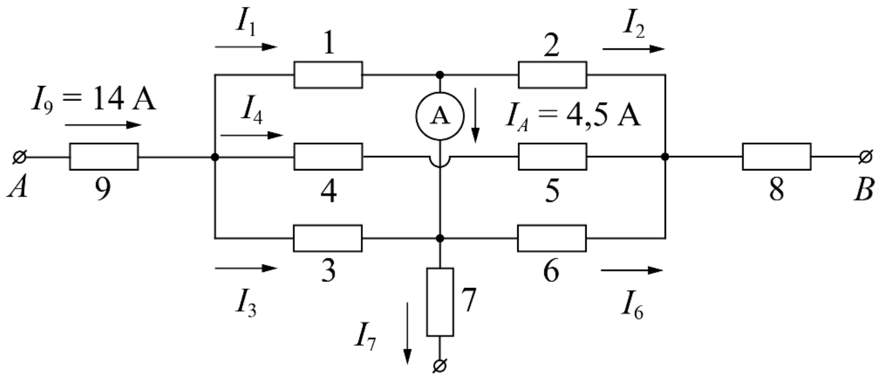


Возможное решение (А. Аполонский). Напряжения на резисторах R_1 и R_3, R_2 и R_6 одинаковы. Поэтому для токов через них справедливы соотношения $I_1 = 3I_3$, $I_2 = 3I_6$.

В узле C ток разделяется: $I_1 = I_2 + I_\text{А}$. Для узла D: $I_3 + I_\text{А} = I_6 + I_7$.

Сила тока $I_7 = I_3 - I_6 + I_\text{А} = \dfrac{1}{3}I_1 - \dfrac{1}{3}I_2 + I_\text{А} = \dfrac{1}{3}I_\text{А} + I_\text{А} = \dfrac{4}{3}I_\text{А} = 6$ А.

Сила тока, втекающего в рассматриваемый участок цепи, $I_9 = 14$ А. Вытекает из участка $I_7 = 6$ А, и $I_8 = I_9 - I_7 = 8$ А.



Сила тока

$$I_4 = I_9 - \left(I_1 + I_3\right) = I_9 - 4I_3. \qquad (1)$$

Сумма напряжений на резисторах R_1 и R_2 равна сумме напряжений на R_4 и R_5:

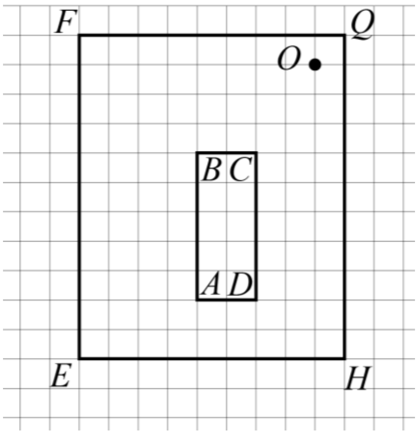
$$3I_3R_1 + \left(3I_3 - I_\text{А}\right)R_2 = I_4\left(R_4 + R_5\right). \qquad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим: $I_4 = 2{,}0$ А.

$$U_{AB} = I_9R_9 + I_4\left(R_4 + R_5\right) + I_8R_8 = 208 \text{ В}.$$

№	**Задача 2.10.2. Критерии оценивания (12 баллов).**	**Баллы**
1	Верно применено условие разветвления токов для любого из узлов	1
2	Указано, что сумма токов, втекающих в приведённый в условии участок цепи равна сумме токов, вытекающих из него	2
3	Указано одно из соотношений между напряжениями: $U_1 = U_3$ или $U_2 = U_6$ или $U_1 + U_2 = U_4 + U_5$ или $U_3 + U_6 = U_4 + U_5$ или верно записано второе правило Кирхгофа для контура из резисторов 1-6.	2
4	Записано, что напряжение на участке *AB* равно сумме напряжений U_9, U_8 и напряжения на одной из трёх центральных веток.	1
5	Найдена сила тока I_7 (формула + число)	1+1
6	Найдена сила тока I_8 (формула + число)	1+1
7	Найдено напряжение *AB* (формула + число)	1+1

Задача 2.10.3. На складе (10 баллов). На территории промышленного объекта, обнесенной забором *FGHE*, расположен пост охраны (точка *O*) и склад *ABCD*. Охранники жаловались, что с поста им не видно стороны склада *AB* и *AD*. Для решения проблемы было решено установить плоские зеркала. Так как по территории объекта постоянно передвигается тяжелая техника, то зеркала можно вешать только на забор или на стены склада. При этом плоскость зеркала должна совпадать с плоскостью стены/склада. Схема территории приведена на рисунке. Размер одой клеточки равен 10 м.

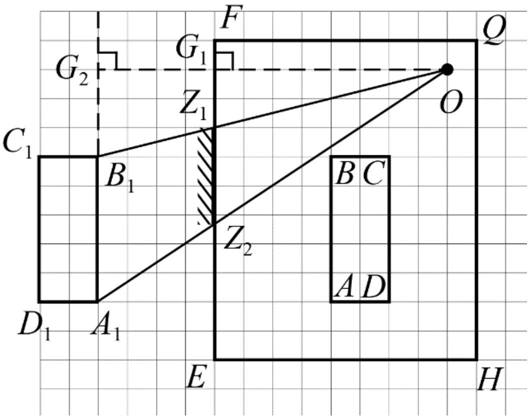


1) Укажите, где нужно разместить плоское зеркало, чтобы с поста охраны была видна вся стена *AB* склада. Построениями докажите, что в зеркале будет видна вся стена *AB*.
2) Укажите минимально возможную ширину зеркала для пункта 1 и где оно должно располагаться. Свои выводы подкрепите построениями и рассуждениями.
3) Возможно ли расположить на стене *EH* одно зеркало так, чтобы с поста охраны в него была видна вся стена *AD*? Свой ответ подкрепите построениями и рассуждениями.
4) Нарисуйте схему расположения зеркал с помощью которой охрана будет видеть всю стену склада *AD*. Вам необходимо использовать минимальное количество зеркал. Построениями докажите, что в зеркалах будет видна вся стена *AD*.

Возможное решение (М. Карманов).

Вопросы №1, 2.

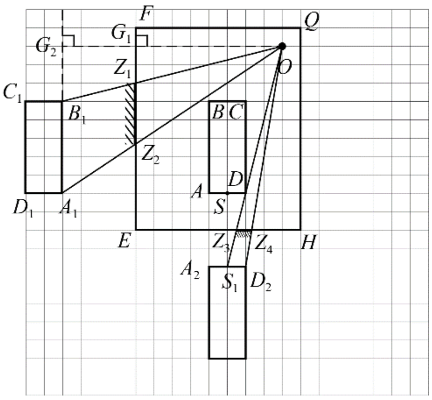
Разместим зеркало на стене *EF*. Для начала предположим, что зеркало покрывает всю стену. Построим изображение склада в зеркале. Изображение, создаваемое плоским зеркалом, симметрично исходному предмету относительно плоскости зеркала. Построим изображение A_1B_1 стены склада. Нам нужно, чтобы лучи от всех точек изображения стены склада доходили до поста охраны. Построим крайние лучи A_1O и B_1O. Именно эти лучи и задают границы зеркала Z_1Z_2. Все остальные нужные нам лучи будут лежать между этими крайними лучами. Размеры зеркала можно найти из подобия треугольников OB_1A_1 и OZ_1Z_2. Их стороны относятся также как высоты



$$\frac{OG_1}{OG_2} = \frac{Z_1Z_2}{B_1A_1},$$ откуда

$$Z_1Z_2 = B_1A_1\frac{OG_1}{OG_2} = \frac{100}{3}\,\text{м} \approx 33{,}3\ \text{м}.$$

Вопросы №3, 4

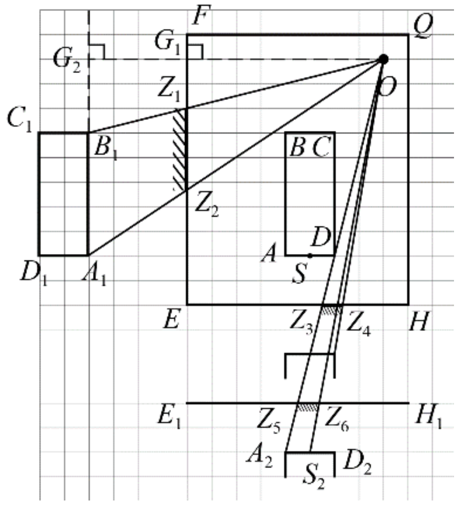


Для начала аналогично пунктам 1 и 2 построим изображения стены *AD* склада в зеркале, размещенном на заборе *EH*.

Как видно из построений угол *D* склада не позволяет увидеть в зеркале всю стену *AD*. Можно увидеть лишь ее половину *SD*. Значит одного зеркала недостаточно.

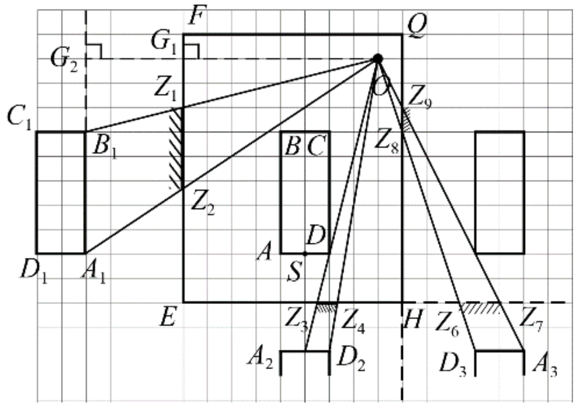
Добавим еще одно зеркало на стену *AD*, чтобы луч, вышедший из точки *A* после отражения от зеркала на заборе, попадал бы в зеркало на стене склада, затем опять в зеркало на заборе и доходил до поста охраны.

Проще всего визуализировать ход такого луча, если при каждом отражении от зеркала изгибать не сам луч, а отражать относительно зеркала пространство, в котором он перемещается. Запустим луч в обратном направлении из точки *O* к точке *A*. Сначала он должен отразиться от зеркала на заборе. При этом можно считать, что луч продолжил движение по прямой, а склад отразился симметрично забору. После отражения от зеркала на стене склада также можно считать, что лучик продолжил движение по прямой, но забор нужно отразить симметрично относительно склада и т.д.



Из получившегося рисунка видно, что для того, чтобы увидеть часть склада *AS* нужно разместить на стене склада зеркало от точки *S* почти до угла *D*, а зеркало на заборе *EH* должно идти о точки Z_4 до точки Z_5.

Таким образом достаточно двух зеркал. А раз одного недостаточно, то очевидно – два является минимально возможным числом.



Есть и другой вариант решения. Второе зеркало можно расположить не на стене *AD* склада, а на заборе *QH*. Построим аналогичным образом ход лучей для этого случая. Как видно из рисунка можно добиться обзора всей стены за счет размещения зеркала Z_6Z_7 на стене *EH* и зеркала Z_8Z_9 на стене *QH*.

№	**Задача 2.10.3. Критерии оценивания (10 баллов).**	**Баллы**
1	Продемонстрировано верное построение хода лучей после отражения от зеркала	1
2	Продемонстрировано верное построение области видимости	1
3	Ответ на первый вопрос + обоснование	1+1
4	Верные построения для второго вопроса + верное число	1+1
5	Верный ответ на 3 вопрос + обоснование	1+1
6	Верный ответ на четвертый вопрос + обоснование	1+1

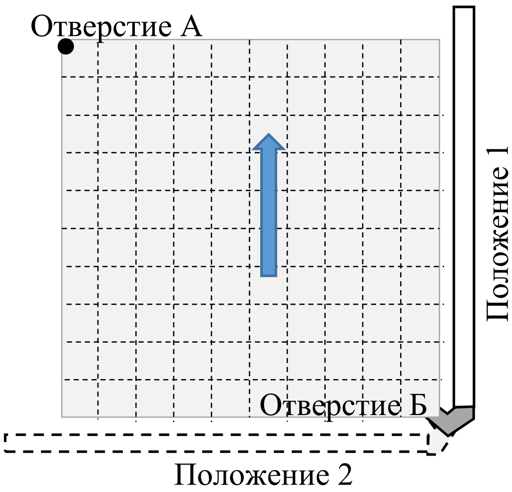
Задача 2.10.4. Гидростатический «серный ящик». (15 баллов). Внутри «серого ящика», имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, находятся тонкие перегородки, которые могут быть расположены только вдоль пунктирных линий (см. рисунки) перпендикулярно боковым стенкам ящика (боковыми называются стенки, на которых нарисована стрелка). Перегородки могут начинаться и заканчиваться либо на стенках «серого ящика», либо в точках пересечения пунктирных линий. Перегородки полностью перекрывают расстояние между боковыми стенками и непроницаемы как для воды, так и для воздуха. С помощью имеющегося оборудования определите расположение перегородок и их размеры. Толщиной перегородок и стенок «серого ящика» можно пренебречь. Оценивать погрешность не нужно.

Оборудование

«Серый ящик», шприц с иглой, полоска миллиметровой бумаги, стакан с жидкостью, пустой стакан, ножницы, скотч.

P.S. От вас требуется обработать приведенные ниже измерения и сделать выводы. В качестве ответа необходимо привести схему расположения перегородок в «сером ящике». Ответ должен быть обоснован и не противоречить имеющимся данным, которые получены экспериментальным путем и поэтому содержат погрешности.

Описание оборудования



«Серый ящик» - квадратная коробочка небольшой толщины с жесткими непрозрачными стенками серого цвета. На рисунке показана боковая стенка коробочки. В одном из углов коробочки есть отверстие (А). В противоположном углу сделано отверстие (Б), в которое помещен вращающийся штуцер с закрепленной на нем прозрачной трубочкой. Штуцер и трубочка не съемные, но трубочку можно поворачивать в положение 1, или в положение 2. Шприц медицинский объемом 100 мл с ценой деления 1 мл. Игла для шприца. Полоска миллиметровой бумаги шириной 1 см и длиной 15 см. Пластиковый стакан (объемом 200 мл) с подкрашенной жидкостью, которая плохо смачивает трубку и стенки коробочки. Пустой пластиковый стакан (объемом 200 мл). Ножницы канцелярские. Небольшая бобина узкого скотча.

Проделанные эксперименты и результаты измерений

Опыт №1. Измерение размеров коробочки.

С помощью полоски миллиметровой бумаги измерим размеры коробочки. Они равны $100\text{ мм}\times100\text{ мм}\times10\text{ мм}$. Измерим расстояние между пунктирными линиями, а также от пунктирных линий до стенок коробочки. Все эти расстояния равны 10 мм.

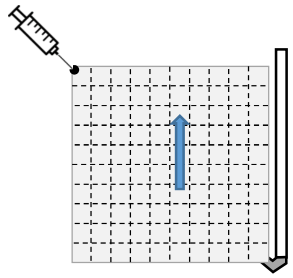
Опыт №2. Измерение внешнего диаметра трубки.

Для измерения внешнего диаметра трубки измерим длину ее окружности. Для этого намотаем на трубку полоску миллиметровой бумаги. Сделаем 2 оборота. Длинна намотанной части бумаги равна 8,9 см.

Опыт №3. Измерение внутреннего диаметра трубки.

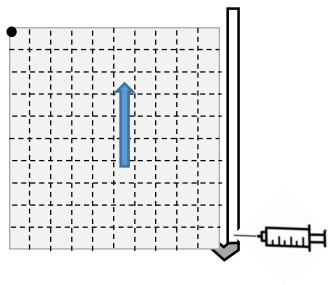
Наберем в шприц жидкость, затем присоединим шприц (без иглы) к трубке и выдавим часть жидкости в трубку так, чтобы жидкость образовывала сплошной цилиндр без пузырьков воздуха. Объем выдавленной жидкости равен 8 мл. С помощью полоски миллиметровой бумаги измерим длину части трубки, заполненной жидкостью. Она равна 8,0 см.

Опыт №4. Установим коробочку на горизонтальный стол так, чтобы нарисованная на ней стрелка указывала вверх. Наберем в шприц 100 мл жидкости и будем заливать её в коробочку порциями через отверстие А так, чтобы за каждую порцию уровень воды в трубочке поднимался на 5 мм. Уровень h жидкости в трубочке будем измерять от нижней стенки коробочки с помощью полоски миллиметровой бумаги, приклеенной к коробочке.



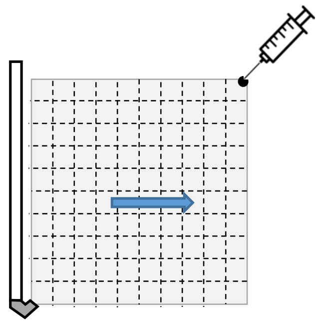
Полученные измерения $h(V_4)$ занесем в таблицу. Если при достаточно большом увеличении объема жидкости в коробочке уровень в трубочке не изменяется, то запишем в таблицу два крайних значения объемов, соответствующих этому уровню.

Опыт №5. Выльем всю жидкость из коробочки. При этом заметим, что после простого переворота коробочки из нее вытекает не вся жидкость. Чтобы извлечь из коробочки всю жидкость ее нужно наклонять под разными углами и трясти. По звуку определим, что нам удалось вылить всю жидкость из коробочки. Установим коробочку также, как в опыте №4.

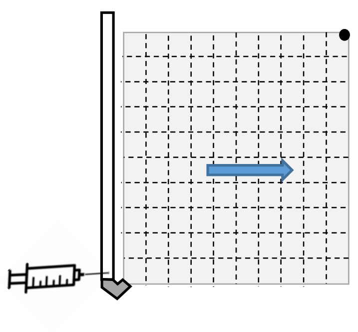


Теперь будем заливать жидкость через отверстие Б, в которое вставлена трубочка. Для этого наберем в шприц 100 мл жидкости, наденем на него иглу и аккуратно проткнем иглой трубочку в самом низу. Таким образом мы сможем подавать жидкость в самое основание трубочки. Снимем аналогичную зависимость $h\,(V_5)$ – уровня жидкости в трубочке от объема налитой жидкости. Полученные данные занесем в таблицу.

Опыт №6. Вновь удалим всю жидкость из коробочки. Заклеим дырочку в трубочке с помощью скотча. Поставим коробочку так, чтобы стрелка смотрела вправо, а трубочка располагалась в положении 2. Повторим те же действия, что в опыте №4, заливая жидкость через открытое отверстие А. Полученные данные $h(V_6)$ занесем в таблицу.



Опыт №7. Опять удалим всю жидкость из коробочки и повторим опыт №5, но расположив коробочку как в опыте №6. Полученные данные $h(V_7)$ занесем в таблицу.



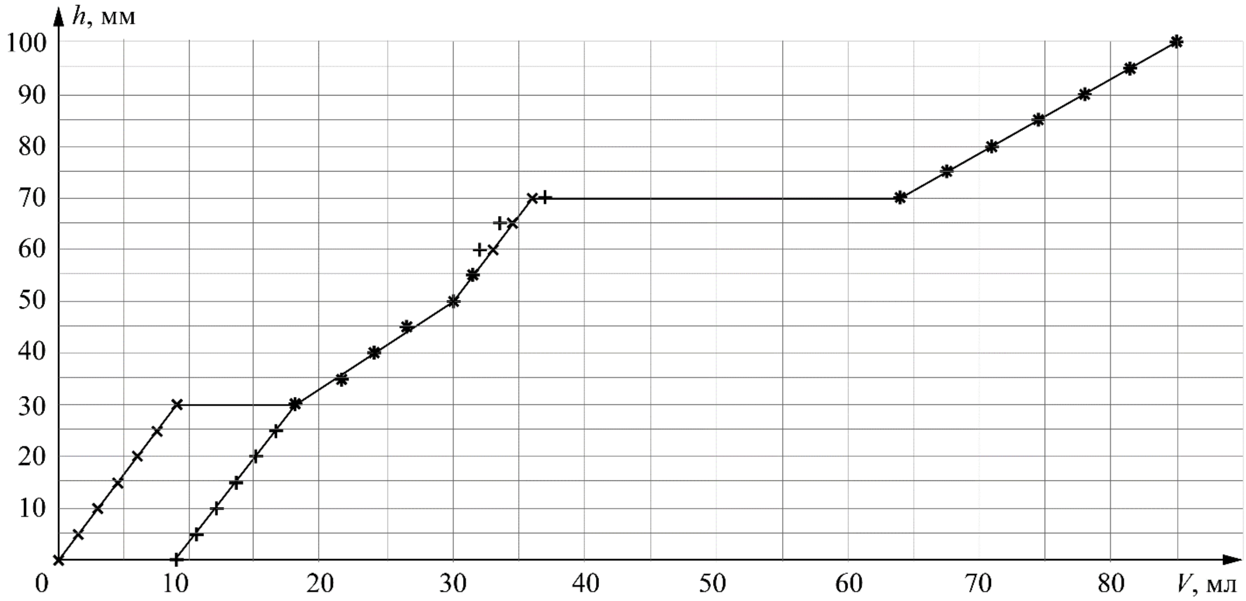
Таблица

h, **мм**	***V*₄, мл**	***V*₅, мл**	***V*₆, мл**	***V*₇, мл**
0	0 - 9	0	0 - 10	0
5	11	2	15	6
10	13	4	21	11
15	15	6	26	17
20	17	8	32	22
25	19	10	38	28
30	21	12 - 21	43	33
35	25	25	46	36
40	28	28	49	39
45	31	31	52	42
50	35	35	55	45 - 55
55	37	37	56	56
60	38	39	58	58
65	40	41	59	60
70	44 - 71	43 - 71	61	61
75	75	75	62	62
80	79	79	64	63
85	83	83	66	65
90	87	87	67	67
95	91	91	68	68
100	95	95	70	70

Возможное решение. (М. Карманов).

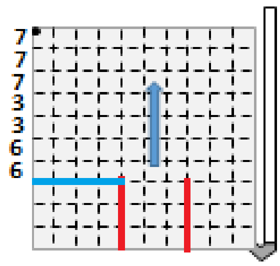
1. Обратим внимание, что при заливании жидкости в «серый ящик» часть ее оказывается в трубочке. Вычислим площадь внутреннего сечения трубочки. Из опыта №3 следует, что площадь внутреннего сечения трубочки равна $S_{тр}$ = 1,0 см^2. Это значит, что в полностью заполненной трубочке будет находиться 10 мл жидкости, что сравнимо с общим объемом залитой жидкости. Пересчитаем значения в таблице, вычтя из них объем $S_{тр}h$ жидкости в трубочке. Построим графики зависимости $h(V)$.

График для 4 и 5 опытов.



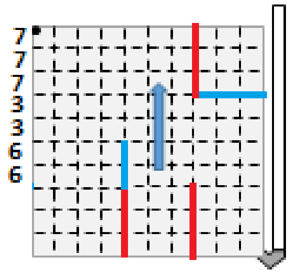
Плюсиками отмечены точки, соответствующие заливанию жидкости «сверху», а крестики – «снизу». Как видно, графики отличаются только для участка 0-30 мм.

При заливании жидкости «сверху» она сначала заполняет некоторую полость, расположенную сбоку от нижнего отверстия. Объем этой полости равен 9 мл. Учитывая, что после 30 мм графики идут совершенно одинаково, можно сделать вывод, что при заполнении «снизу» эта же полость заполняется при уровне воды в 30 мм. То есть высота перегородки, отделяющей эту полость от отверстия, равна 30 мм. Также заметим, что при заливании «снизу» полость начала заполняться после того, как было залито 9 мл жидкости. То есть объем пространства справа от перегородки тоже равен 9 мл. Нарисуем самый простой из возможных вариантов, соответствующих этому условию. Красным обозначены перегородки, в которых мы более-менее уверены, а синим - которые расположены весьма условно.



Подсчитаем эффективную площадь, заполняемую жидкостью, при различных ее уровнях. Из графика видно, что на уровне 30-50 мм заполняется площадь в 6 см^2, 50-70 мм – 3 см^2, 70-100 мм – 7 см^2.

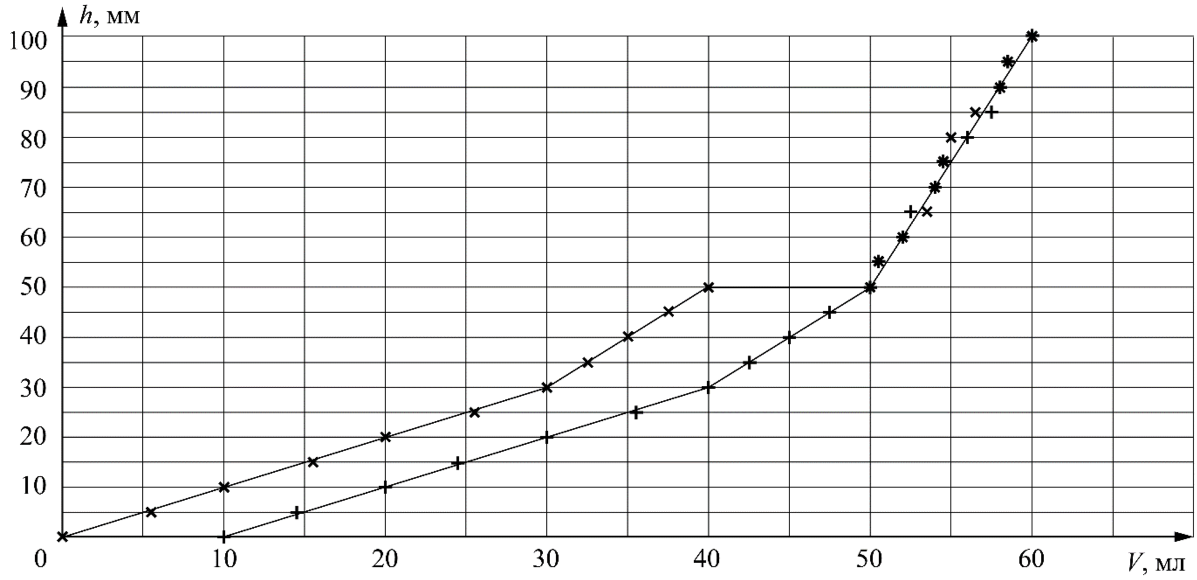
Разберемся с уровнем 30-50 мм. Должны заполняться только 6 клеток в ряду из 4-х. Правые 4 клетки должны заполняться, так как иначе при заливании жидкости снизу не будет ее перетока через перегородку. Предположим, что стенка находится слева.



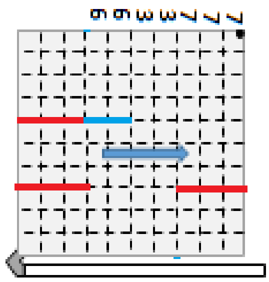
Разберемся с уровнем 70-100 мм. Там заполняется 7 клеток в ряду и обязана заполняться клетка, прилегающая к отверстию. Пусть перегородками отрезана область размером 3х3. Если эта область располагается не в правом верхнем углу, а сдвинута левее, то в зазор между этой областью и правой стенкой жидкость все равно не сможет забежать, так как там образуется воздушный пузырь, значит область расположена в правом верхнем углу. Собственно, нижняя горизонтальная перегородка этой области не обязательна, так как жидкость в любом случае не будет затекать в нее.

Перейдем к рассмотрению 6 и 7 опытов.

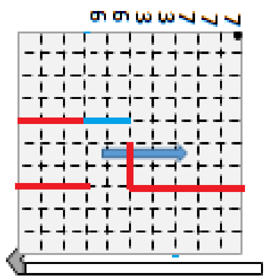
График для 6 и 7 опытов.



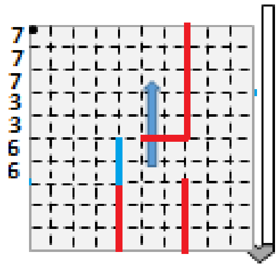
Из графика видно, что заполнение сверху и снизу идет одинаково, с той лишь разницей, что при заполнении сверху изначально жидкость заполняет полость объемом 10 мл, которая при заполнении снизу заполняется при уровне жидкости в 50 мм. Заполняемые площади для каждого уровня равны: 0-30 мм – 10 см^2, 30-50 мм – 5 см^2, для участка 50-100 мм нельзя гарантированно утверждать, что график линейный. Но, если он линейный, то заполняемая площадь равна 2 см^2.



При заполнении снизу до уровня 30 мм заполняется все сечение коробочки, значит там отсутствуют вертикальные (для этого положения коробочки) перегородки.

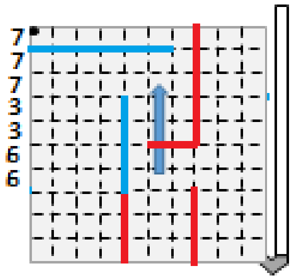


Далее, заметим, что при уровне в 50 мм в коробочку вмещается 50 мл жидкости при заполнении хоть сверху, хоть снизу. То есть при уровне в 50 мм должна быть заполнена вся нижняя (для этого расположения коробочки) половина коробочки. Также учтем, что при заполнении сверху, жидкость должна сначала заполнять полость объемом 10 мл, эта полость может располагаться только на уровне от 30 до 50 мм, но при заполнении этого уровня снизу, заполняемая площадь равна 5 см^2. Тогда по сути единственный возможный вариант расположения этой полости следующий:



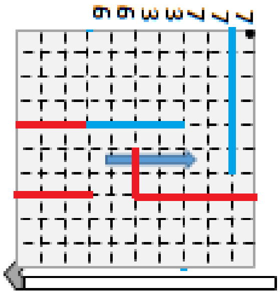
Вернемся к 4 и 5 опытам.

В правом верхнем углу у нас образовалась полость объемом 15 мл. Полный объем жидкости, вмещающейся в коробочку равен 85 мл, то есть незаполненным остается как раз объем полости в правом верхнем углу, а все остальное пространство должно быть заполнено.



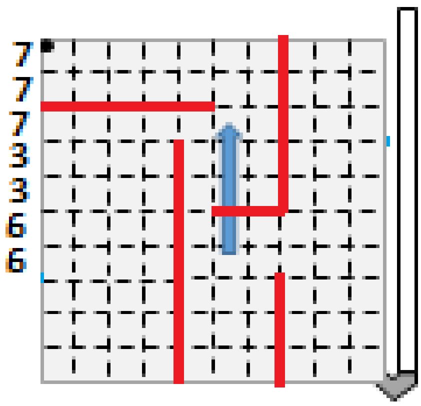
На уровне 50-70 мм должно заполняться три клеточки в ряду, а после 70 мм идет заполнение полости объемом 27-28 мл. Самый простой способ обеспечить эти условия – поднять синюю стенку до уровня 70 мм. Также чтобы жидкость из верхнего отверстия не попадала в левую полость, нужна горизонтальная перегородка. Такое расположение перегородок полностью соответствует данным опытов 4 и 5.

Вернемся к опытам 6 и 7.



Первая проблема заключается в том, что теперь при подъеме жидкости до уровня в 40 мм правая синяя стенка запрет воздух в левом верхнем углу и не позволит заполнять эту полость. Значит, синюю стенку надо укоротить. Общий объем жидкости, вмещающейся в коробочку при таком расположении равен 60 мл, то есть полость объемом 40 мл не должна быть заполнена, и она явно расположена в левом верхнем углу коробочки. Кроме того, начиная с уровня 50 мм должно заполняться только по 2 клеточки в ряд, что соответствует объему в 10 мл. Тогда нужно перенести синюю перегородку левее и укоротить ее.

Получим окончательный вариант расположения перегородок, не противоречащий исходным данным.



№	**Задача 2.10.4. Критерии оценивания (10 баллов)**	**Баллы**
1.	Учет объема жидкости, находящегося в трубке	2
2.	Соответствие предложенного расположения перегородок условиям при расположении коробочки «стрелка вверх»	
2.1.	Имеется полость объемом 9 мл, заполняемая в первую очередь при заливании через А.	1
2.2.	Имеется полость объемом 9 (12) мл с высотой перегородки 30 мм, заполняемая в первую очередь при заливании через Б.	2
2.3.	Объем жидкости, вмещающийся в коробочку, равен 85 (95) мл.	1
3.	Соответствие предложенного расположения перегородок условиям при расположении коробочки «стрелка вправо»	
3.1.	Имеется полость объемом 10 мл, заполняемая в первую очередь при заливании через А.	1
3.2.	При заполнении через В первых 30 (33) мл заполняется вся ширина коробочки	1
3.3.	При заполнении через В 50 (55) мл оказывается полностью заполнена нижняя половина коробочки.	2
3.4.	Объем жидкости, вмещающийся в коробочку, равен 60 (70) мл.	2
4.	Все перегородки расположены только на пунктирных линиях и начинаются/заканчиваются только в точках их пересечения и на стенках коробочки.	1
5.	Получен ответ, соответствующий всем условиям.	2