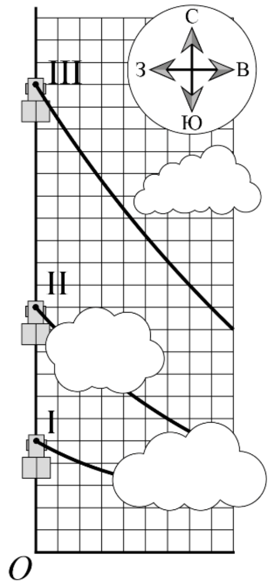
Задача 1.10.1. Разгон паровоза (15 баллов). На трех фотоснимках одного участка местности, сделанных с равными интервалами времени τ, запечатлен игрушечный паровоз и фрагменты шлейфа дыма от него. Наложенные друг на друга фотографии приведены на рисунке.

Зная, что, тронувшись с места, паровоз поехал на север с постоянным ускорением $a = 0{,}4$ м/с^2, и что в этот день дул западный ветер со скоростью $u = 4$ м/с, найдите интервал времени τ и на каком расстоянии от точки O находилась труба неподвижного паровоза.

Цены делений шкал сетки по вертикали и горизонтали равны.



Возможное решение (М. Замятнин). Пусть цена деления шкалы расстояний равна s. Далее возможны разные варианты рассуждений.

Вариант №1.

Обозначим скорость в конце первого участка (от начала движения до первого снимка) за υ_1, в конце второго (от первого снимка до второго) - υ_2 и в конце третьего - υ_3. Так как снимки делались через равные промежутки времени τ, то $\upsilon_2 = \upsilon_1 + a\tau$; $\upsilon_3 = \upsilon_1 + 2a\tau$.

Найдём средние скорости на втором и третьем участках. С одной стороны, их можно выразить как среднее арифметическое скоростей в начале и в конце участка, с другой – как отношение пройденного пути ко времени.

$$\begin{cases} \upsilon_{2\text{ср}} = \dfrac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \upsilon_1 + \dfrac{1}{2}a\tau = \dfrac{6s}{\tau}; \\ \upsilon_{2\text{ср}} = \dfrac{\upsilon_2 + \upsilon_3}{2} = \upsilon_1 + \dfrac{3}{2}a\tau = \dfrac{10s}{\tau}. \end{cases}$$

Отсюда $a\tau = \dfrac{4s}{\tau}$; $\upsilon_1 = \dfrac{4s}{\tau}; \Rightarrow \upsilon_1 = a\tau$. Это означает, что паровоз начал движение за τ секунд до того, как был сделан первый снимок. Тогда путь, пройденный им на первом участке, равен $\upsilon_{1\text{ср}}\tau = \dfrac{0 + \upsilon_1}{2}\tau = \dfrac{2s}{\tau}\tau = 2s$. Значит паровоз начал движение из точки, расположенной на $3s$ выше точки O.

Рассмотрим третий участок движения паровоза. $\upsilon_{3\text{ср}} = \upsilon_1 + \dfrac{3}{2}a\tau = \dfrac{5}{2}a\tau = \dfrac{10s}{\tau} \Rightarrow a\tau^2 = 4s.$

Из рисунка видно, что пока паровоз проезжал третий отрезок дым, выпущенный в самом конце второго отрезка, сдвинулся на восток на расстояние $8s = u\tau$. Тогда $u\tau = 2a\tau^2; \Rightarrow \tau = \dfrac{u}{2a} = 5$ с.

Цена деления шкалы расстояний $s = \dfrac{a\tau^2}{4} = 2{,}5\,\text{м}$, следовательно изначально паровоз находился на 7,5 метров севернее точки O.

Вариант №2

Пусть t_0 – время движения паровоза от старта до момента выполнения первого снимка, а s_0 – его начальное расстояние от точки O.

Тогда можем записать:

$$\begin{cases} 5s = s_0 + \dfrac{at_0^2}{2}; \\ 11s = s_0 + \dfrac{a(t_0 + \tau)^2}{2}; \\ 21s = s_0 + \dfrac{a(t_0 + 2\tau)^2}{2}. \end{cases}$$

Вычтем из третьего уравнение второе, а из второго первое.

$$\begin{cases} 10s = \dfrac{a(t_0+2\tau)^2}{2} - \dfrac{a(t_0+\tau)^2}{2}; \\ 6s = \dfrac{a(t_0+\tau)^2}{2} - \dfrac{at_0^2}{2}. \end{cases}$$

Поделим верхнее уравнение на нижнее

$$\frac{5}{3} = \frac{(t_0+2\tau)^2-(t_0+\tau)^2}{(t_0+\tau)^2-t_0^2} = \frac{3\tau^2+2t_0\tau}{\tau^2+2t_0\tau}.$$

Получаем $t_0=\tau$, тогда $6s=\frac{3}{2}a\tau^2;\ \Rightarrow\ \frac{a\tau^2}{2}=2s.$

Подставим в уравнение $5s = s_0+\frac{at_0^2}{2} = s_0+2s;\ \Rightarrow s_0=3s$. Значит паровоз начал движение из точки, расположенной на $3s$ выше точки O.

Рассмотрим третий отрезок движения паровоза.

$$10s = \frac{a(t_0+2\tau)^2}{2} - \frac{a(t_0+\tau)^2}{2} = \frac{5}{2}a\tau^2;\ \Rightarrow a\tau^2 = 4s.$$

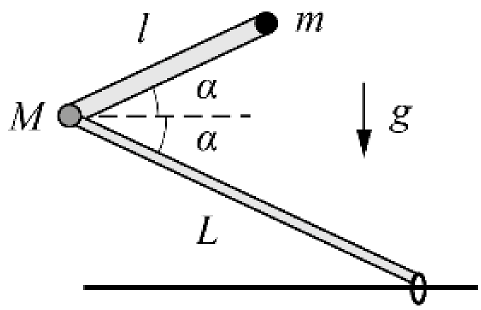
Из рисунка видно, что пока паровоз проезжал третий отрезок дым, выпущенный в самом конце второго отрезка, сдвинулся на восток на расстояние $8s=u\tau$. Тогда $u\tau=2a\tau^2;\ \Rightarrow \tau=\frac{u}{2a}=5$ с.

Найдём $s=\frac{a\tau^2}{4}=2{,}5$ м, следовательно изначально паровоз находился на 7,5 метров севернее точки O.

Возможны и другие варианты решений.

№	**Задача 1.10.1. Критерии оценивания (15 баллов)**	**Баллы**
1	Записаны верные уравнения, связывающие перемещения паровоза или средние скорости для 2 и 3 участков, либо аналогичные.	1+1
2	Показано, что время от начала движения до первого снимка равно τ (в явном виде может не присутствовать, но если следует из промежуточных выкладок, то балл ставится)	1
3	Найдена точка старта ($3s$)	3
4	Верно записана связь между перемещением паровоза и соответствующим ему перемещением дыма. (Если использовались неудобные точки, координаты которых невозможно точно определить, то за пункт ставится только половина баллов)	3
5	Получено верное значение $\tau = 5$ с (формула + число)	2+1
6	Получено верное значение расстояния 7,5 м от точки старта до точки O (формула + число). В качестве формулы может быть засчитана верная формула для размера s одной клеточки	2+1

Задача 1.10.2. Шарнир и колечко (15 баллов). В вертикальной плоскости находятся два невесомых стержня, соединённых шарниром массы M. На свободном конце верхнего стержня закреплён груз массы m, а на свободном конце нижнего стержня закреплено лёгкое колечко, которое может скользить по гладкой горизонтальной закреплённой спице. Длина верхнего стержня l, длина нижнего стержня $L > l$. Изначально стержни составляют углы α с горизонтом и удерживаются неподвижно. Затем их отпускают.



Найдите:

1) Ускорения шарнира $a_{ш0}$ и грузика $a_{г0}$ сразу после начала движения.
2) Ускорение колечка $a_к$ в момент времени, когда шарнир, груз и колечко окажутся на одной прямой.

Считайте, что стержни и спица тонкие и все тела могут пролетать мимо друг друга не соударяясь. Ускорение свободного падения g.

Возможное решение (А. Уймин). Рассмотрим нижний стержень. Так как он невесомый, то векторная сумма сил, действующих на него, должна быть равна нулю. На стержень действует сила реакции опоры со стороны спицы, направленная вертикально вверх, и некоторая сила со стороны шарнира M. Значит сила, действующая с стороны шарнира, должна быть направлена вертикально вниз. Если стержень лёгкий, то нулю также должна равняться и сумма моментов действующих на него сил. Вместе с предыдущим условием это означает, что сила реакции опоры со стороны спицы, как и сила, действующая на стержень со стороны шарнира равны нулю.

Рассмотрим теперь верхний стержень вместе с шарниром и грузом. На него действуют две силы тяжести и сила со стороны нижнего стержня. Последняя по третьему закону Ньютона противоположна силе, с которой шарнир действует на нижний стержень, а она равна нулю. Тогда на верхний стержень, шарнир и груз действуют только силы тяжести, значит они двигаются вертикально вниз с постоянным ускорением $a_{ш0} = a_{г0} = g$, а стержень сохраняет ориентацию в пространстве.

Шарнир кольцо и груз окажутся на одной прямой, когда верхний стержень опустится ниже спицы и нижний стержень опять будет составлять угол α с горизонтом.

Запишем закон сохранения энергии и выразим скорость короткого стержня в этот момент времени. К этому времени он переместился по вертикали на расстояние $\Delta h = 2L\sin\alpha$, поэтому

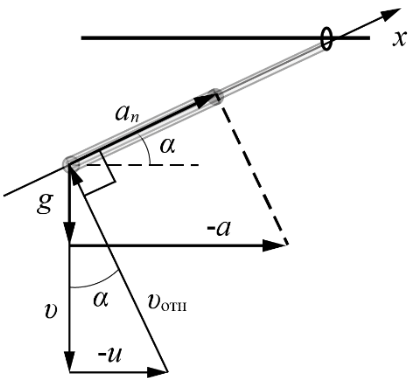
$$\frac{(M+m)\upsilon^2}{2} = (M+m)g2L\sin\alpha;\ \Rightarrow \upsilon^2 = 4gL\sin\alpha\ .$$

Пусть u – скорость колечка в интересующий нас момент времени.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с колечком. В этой СО шарнир движется по окружности радиуса L.

Его скорость $\vec{\upsilon}_{отн} = \vec{\upsilon} - \vec{u}$ и направлена перпендикулярно стержню, поэтому $\upsilon_{отн} = \upsilon / \cos\alpha$.

Направим ось x так, как показано на рисунке. Найдём нормальную составляющую ускорения шарнира в этой СО.



$$a_n = g_x - a_x = -g\sin\alpha + a_к\cos\alpha = \frac{\upsilon_{отн}^2}{L}.$$

Тогда

$$a_к = \frac{\upsilon_{отн}^2}{L\cos\alpha} + g\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4gL\sin\alpha}{L\cos^3\alpha} + g\,\mathrm{tg}\,\alpha = g(5 + 4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

№	**Задача 1.10.2. Критерии оценивания (15 баллов)**	**Баллы**
1	Силы, действующие на большой стержень, равны нулю.	2
2	Малый стержень движется равноускоренно и не меняет ориентацию в пространстве.	2
3	Найдены начальные ускорения груза и шарнира.	1
4	Найдено расположение стержней в момент времени, соответствующий второму вопросу.	2
5	Найдена скорость стержня	2
6	Записан достаточный набор верных уравнений для определения ускорения колечка	3
7	Найдено ускорение колечка	3

Задача 1.10.3. Воздушный шар (10 баллов). Оболочка воздушного шара изготовлена из нерастяжимой плотной ткани с массовой поверхностной плотностью σ (масса 1 м^2 поверхности оболочки численно равна σ). Если оболочку полностью заполнить газом, то она приобретает форму сферы радиусом r. В пустую оболочку закачивают некоторое количество гелия.

1) При каких значениях массы m гелия шар будет подниматься?

2) Какому соотношению должны удовлетворять параметры шара, чтобы его подъём был возможен?

Молярная масса гелия M_{He}, воздуха – $M_{\text{В}}$, атмосферное давление p_0, температура – T. Объем шара $V = 4\pi r^3/3$, площадь сферы $S = 4\pi r^2$.

Возможное решение (А. Аполонский). В зависимости от количества закачанного гелия объем шара V таков, что $V \le 4\pi r^3/3$.

Пока оболочка не раздулась до максимального объёма, давление гелия внутри равно атмосферному. Максимальное значение объёма достигается при массе закачанного гелия

$m_0 = \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{p_0 M_{\text{He}}}{RT}$. При массе гелия $m < m_0$ объем шара $V = \frac{m}{M_{\text{He}}}\frac{RT}{p_0}$.

Здесь R – универсальная газовая постоянная.

Для того, чтобы при этой массе гелия шар начал подниматься, необходимо, чтобы сила Архимеда была больше силы тяжести:

$$\rho_B V g > mg + 4\pi r^2 \sigma g. \quad (1)$$

Здесь $\rho_B = p_0 M_{\text{В}}/(RT)$ – плотность воздуха. Подставляя выражения для V и ρ_B в условие (1), получаем

$$m\left(\frac{M_{\text{В}}}{M_{\text{He}}} - 1\right) > 4\pi r^2 \sigma \text{ или } m > \frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{He}}}{M_{\text{В}} - M_{\text{He}}}. \quad (2)$$

Если масса гелия $m > m_0$, то условие (1) выглядит так:

$$\frac{4\pi r^3}{3}\frac{p_0 M_{\text{В}}}{RT} > m + 4\pi r^2 \sigma \text{ или } m < 4\pi r^2\left(\frac{p_0 M_{\text{В}} r}{3RT} - \sigma\right). \quad (3)$$

С учётом (2) и (3) условие для массы гелия, при которой шар поднимет сам себя

$$\frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{He}}}{M_{\text{В}} - M_{\text{He}}} < m < 4\pi r^2\left(\frac{p_0 M_{\text{В}} r}{3RT} - \sigma\right).$$

Если левая часть этого неравенства больше правой, то шар не поднимется ни при каких массах. Это произойдёт, если $\frac{\sigma M_{\text{He}}}{M_{\text{В}} - M_{\text{He}}} > \frac{p_0 M_{\text{В}} r}{3RT} - \sigma$, или $r < \frac{3RT\sigma}{p_0\left(M_{\text{В}} - M_{\text{He}}\right)}$.

Окончательный ответ на вопрос задачи:

При $r > \frac{3RT\sigma}{p_0\left(M_{\text{В}} - M_{\text{He}}\right)}$ условие на полёт: $\frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{He}}}{M_{\text{В}} - M_{\text{He}}} < m < 4\pi r^2\left(\frac{p_0 M_{\text{В}} r}{3RT} - \sigma\right)$.

При $r < \frac{3RT\sigma}{p_0\left(M_{\text{В}} - M_{\text{He}}\right)}$ шар не взлетит.

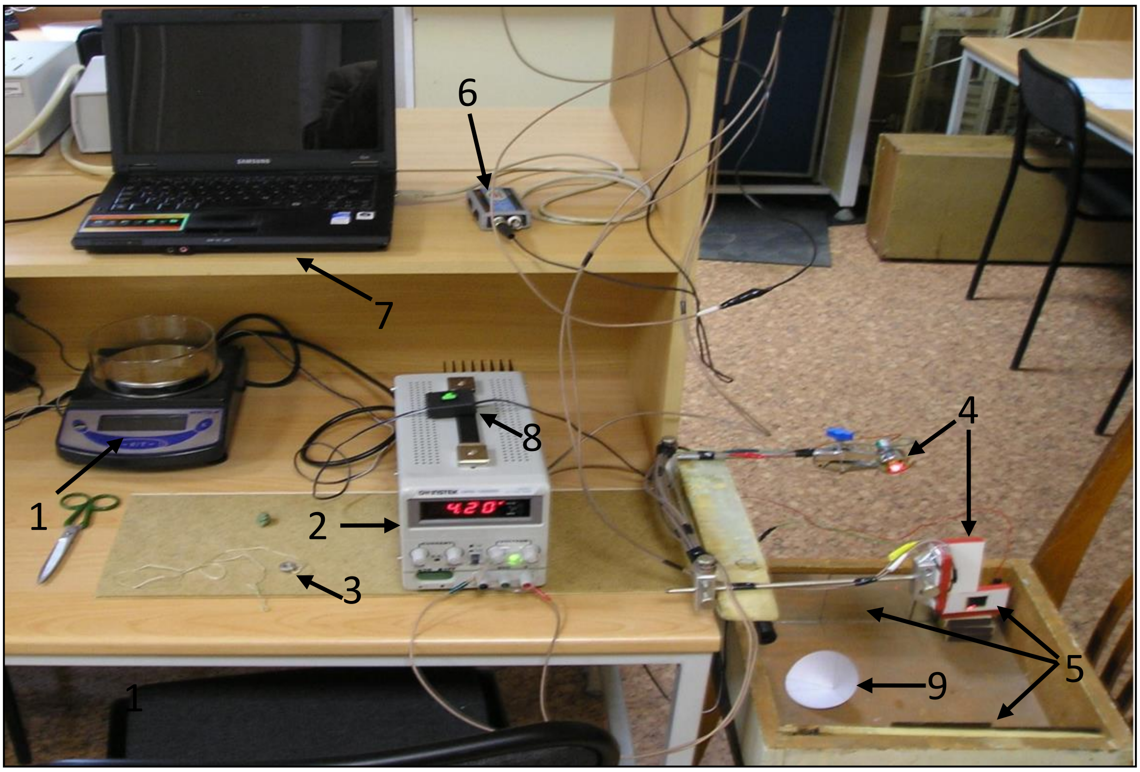
№	**Задача 1.10.3. Критерии оценивания (10 баллов).**	**Баллы**
1	Отмечено, что при малых значениях массы гелия, закачанного в оболочку, его давление будет атмосферным, а объем $V = \frac{m}{M_{\text{He}}}\frac{RT}{p_0}$.	1
2	Определена масса гелия $m_0 = \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{p_0 M_{\text{He}}}{RT}$, превышение которой не приведёт к изменению объема шара	1
3	Получено выражение для плотности воздуха $\rho_B = \frac{p_0 M_{\text{B}}}{RT}$	1
4	Записано условие плавания шара $\rho_B V g > mg + 4\pi r^2 \sigma g$.	1
5	Найдена нижняя граница массы гелия $\frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{He}}}{M_{\text{B}} - M_{\text{He}}}$	2
6	Найдена верхняя граница массы гелия $4\pi r^2 \left(\frac{p_0 M_{\text{B}} r}{3RT} - \sigma \right)$.	2
7	Указано, что шар взлетит, если $r > \frac{3RT\sigma}{p_0 \left(M_{\text{B}} - M_{\text{He}} \right)}$	2

Задача 1.10.4. Псевдоэксперимент «Вязкое трение» (10 баллов). Известно, что при падении бумажного конуса на него действует сила $F_{сопр}$ вязкого трения о воздух, зависящая от скорости движения конуса: $F_{сопр} = k\upsilon^n$. Изучите падение бумажного конуса при его разных массах и определите значения коэффициента *n*. Погрешность оценивать не нужно.

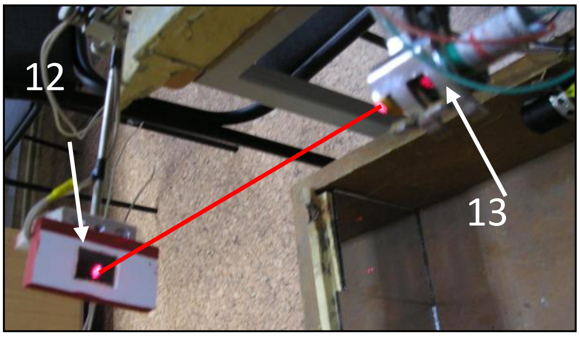
Примечание: в математике часто используется функция логарифма, которая является обратной к функции возведения в степень. По свойствам данной функции если $F_{сопр} = k\upsilon^n$, *то* $\ln\left(F_{сопр}\right) = \ln(k) + n\ln(\upsilon)$. *Значение логарифма от некоторого числа можно вычислить на калькуляторе.*

Оборудование. Два сборных фотодатчика, блок питания, электронные весы, USB-осциллограф, ноутбук, отвес, линейка, ножницы, клей, выкройка для конуса, пластилин, салфетка, миллиметровка для построения графиков.

Описание установки.

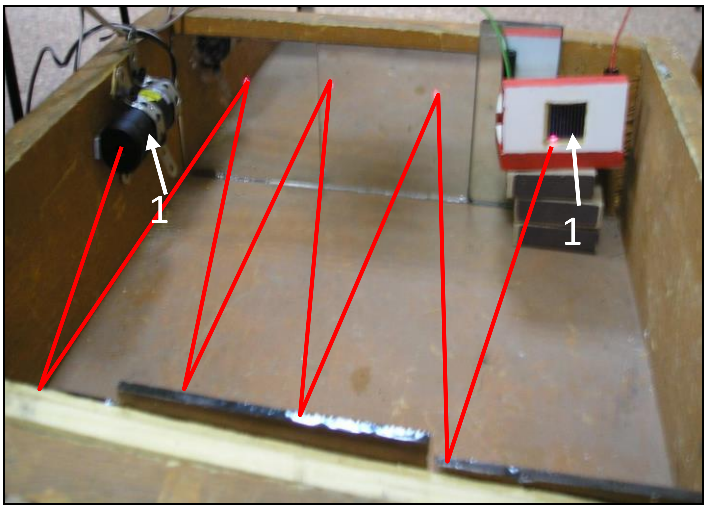


Установка позволяет с большой точностью определять время свободного падения бумажного конуса на участке, где движение конуса является равномерным. Для измерения времени движения конуса используется система из двух сборных фотодатчиков (верхнего 4 и нижнего 5), сигнал с которых через USB-осциллограф 6 поступает в ноутбук 7.



Верхний сборный фотодатчик состоит из лазера 13 и фотоэлемента 12. При пересечении конусом луча лазера напряжение на фотоэлементе изменяется.

Нижний сборный фотодатчик представляет собой квадратный ящик к двум противоположным стенкам которого изнутри приклеены плоские зеркалама. На боковой стенке ящика закреплен лазер 10, луч которого, многократно отразившись от зеркал, попадает на фотоэлемент 11, двигаясь все время в одной горизонтальной плоскости. При падении конуса внутрь ящика луч лазера гарантированно перекрывается и напряжение на фотоэлементе изменяется.



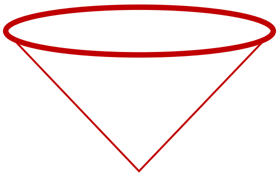
Расстояние от луча верхнего лазера, до плоскости, образуемой лучами нижнего лазера, равно $(23{,}0 \pm 0{,}5)$ см.

Фотоэлементы 11 и 12 соединены в электрическую цепь последовательно друг с другом и подключены к USB-осциллографу, который преобразует значение суммарного напряжения на фотоэлементах в цифровой вид и передает в ноутбук 7. На ноутбуке установлена программа, отображающая график зависимости напряжения от времени с точностью до 0,5 мс. С помощью полученного графика можно определить время движения конуса между двумя пересечениями лучей лазеров.

Для определения массы конуса 9 используются электронные весы 1. Для изменения массы конуса внутрь него помещают небольшие кусочки пластилина.

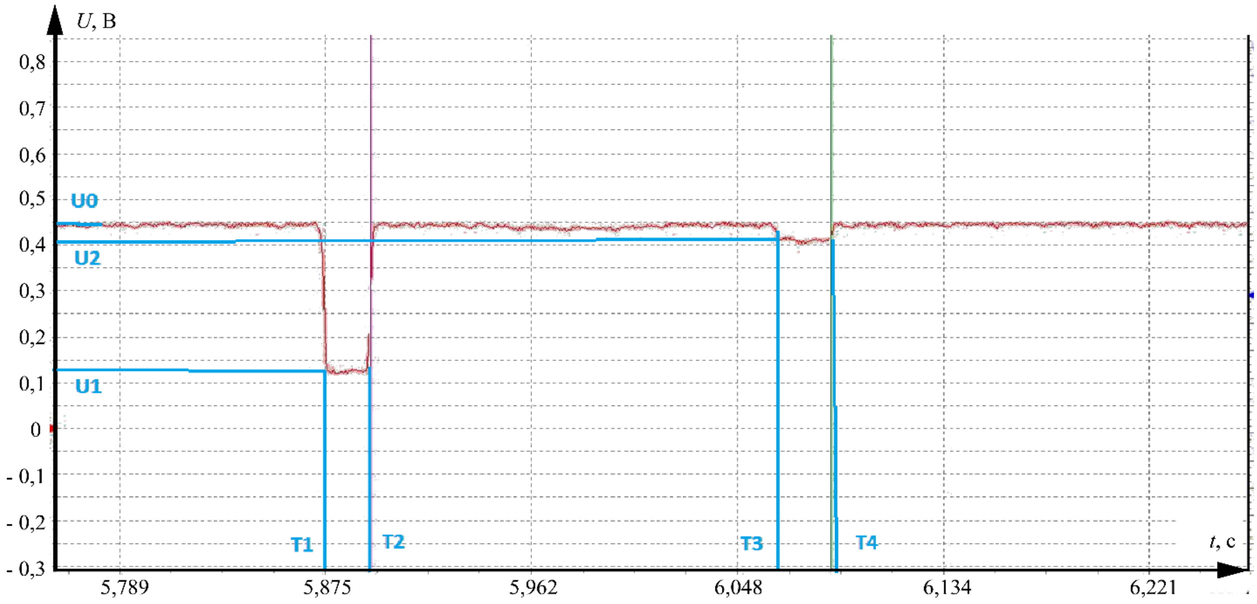
<u>Порядок проведения измерений.</u>

1. Внутрь конуса помещается некоторое количество пластилина и на электронных весах определяется общая масса конуса с пластилином.
2. Конус размещают острием вниз на расстоянии примерно 60-70 см над верхним лазером и отпускают. Расстояние в 60-70 см гарантирует, что при подлете конуса к верхнему лазеру его движение будет практически равномерным.



3. В окне программы по зависимости суммарного напряжения от времени определяются и заносятся в таблицу 7 параметров:
   - $T1$, $T2$ – времена начала и окончания первого провала;
   - $T3$, $T4$ - времена начала и окончания второго провала;
   - U_0 – постоянный уровень напряжения;

- $U1$, $U2$ – уровни напряжений, соответствующие первому и второму провалам.



4. Опыты повторяются с другой массой пластилина внутри конуса.

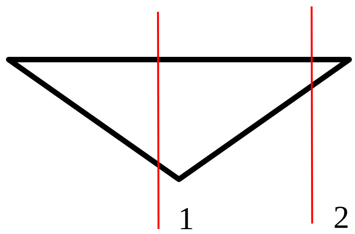
Полученные данные

масса конуса с пластилином, мг	T_1, мс	T_2, мс	T_3, мс	T_4, мс	U_0, В	U_1, В	U_2, В
533	161	181	372	386	0,450	0,123	0,406
600	128	143	331	341	0,450	0,136	0,407
700	192	198	372	381	0,450	0,127	0,402
790	546	552	715	723	0,450	0,123	0,410
894	133	149	289	301	0,450	0,126	0,402
990	120	131	257	277	0,450	0,122	0,392
1125	570	576	694	709	0,450	0,122	0,403

Возможное решение (М. Карманов). Для начала разберемся какие данные нам нужны и как их обрабатывать. В условии сказано, что после запуска конуса его движение на участке между датчиками можно считать равномерным. В этом случае действующая на конус сила тяжести уравновешивается силой сопротивления, значит можем записать $F_{\text{сопр}} = mg,$ где m – масса конуса с пластилином.

Так как движение равномерное то скорость можно вычислить как $\upsilon = L/t,$ где L – расстояние между датчиками, а t – время полета между датчиками. Из условия $L = (23{,}0 \pm 0{,}5)$ см.

Осталось разобраться со временем. В таблице приведены 4 временные отметки и нужно понять какие из них нам нужны.

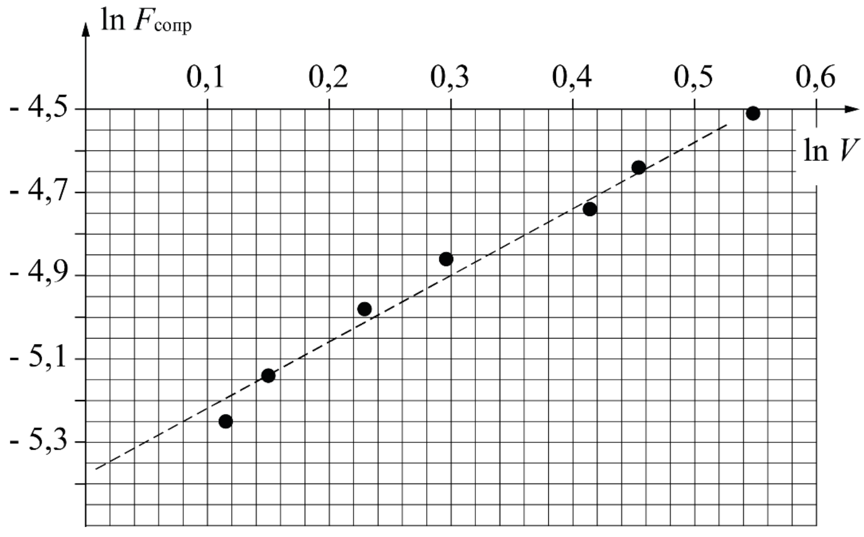


Рассмотрим конус и то, как он пересекает луч лазера. На рисунке представлен конус (вид сбоку) и две возможные траектории луча лазера относительно конуса. Как видно из рисунка невозможно определить на какой высоте находился конус, когда он перекрыл луч лазера, а вот определить, когда луч лазера перестает перекрываться конусом, положение конуса задано однозначно. Значит нам нужны времена T_2 и T_4. Тогда $\upsilon = L/(T_4 - T_2)$.

m, мг	T_2, мс	T_4, мс	$F_{\text{сопр}}$, 10^{-3} Н	υ, м/с	ln($F_{\text{сопр}}$)	Ln(υ)
533	181	386	5,22	1,122	-5,25	0,115
600	143	341	5,88	1,162	-5,14	0,150
700	198	381	6,86	1,257	-4,98	0,229
790	552	723	7,74	1,345	-4,86	0,296
894	149	301	8,76	1,513	-4,74	0,414
990	131	277	9,70	1,575	-4,64	0,454
1125	576	709	11,03	1,729	-4,51	0,548

Из условия известно, что $F_{\text{сопр}} = k\upsilon^n$, тогда $\ln(F_{\text{сопр}}) = \ln(k) + n\ln(\upsilon)$.

Для определения параметра n построим график в логарифмических координатах.



Из графика найдем угловой коэффициент (и координату точки пересечения с вертикальной осью). Получаем n = 1,64.

№	**Задача 1.10.4. Критерии оценивания (10 баллов).**	**Баллы**
1	Для определения скорости выбраны времена T_2 и T_4	1
2	Выбор в п. 1 обоснован	1
3	Из условия установившегося движения сделан вывод о равенстве сил сопротивления силе тяжести	1
4	Вычислена сила сопротивления для всех опытов	1
5	Вычислена скорость для всех опытов	1
6	Выполнена линеаризация зависимости	1
7	Построен график для определения параметров эксперимента	2
8	Найдено значение $n = 1,65 \pm 0,10$	2
	$n \in (1,45 \div 1,55) \cup (1,75 \div 1,85)$ (1 балл)	