

Материалы для проведения
регионального этапа
XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Первый день

5 февраля 2021 г.

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, Д. А. Демин, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. Т. Крымский, А. С. Кузнецов, С. А. Лучинин, А. К. Львов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храпцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.



ВВЕДЕНИЕ

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **5 февраля 2021 г.** (I тур) и **6 февраля 2021 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временными регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2020–2021 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
|--------------|---|
| 7 | Полное верное решение. |
| 6–7 | Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение. |
| до 4 | В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка. |
| до 3 | В задаче типа «Оценка+пример» построен пример. |
| до 1 | Рассмотрен важный случай при отсутствии решения. |
| 0 | Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца. |
| 0 | Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют. |

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

◆

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 класс

- 9.1. Ослик Иа-Иа составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и покрасил шесть палочек в два цвета: три самых коротких — в жёлтый цвет, а три остальных — в зелёный. Обязательно ли ослику удастся составить два треугольника, один — из трёх жёлтых палочек, а другой — из трёх зелёных? (Л. Емельянов)

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Если, например, у Иа-Иа были два равных треугольника со сторонами 1, 2, 2, то в первой кучке окажутся палочки с длинами 1, 1, 2, из которых треугольник составить нельзя.

Замечание. Существует много других примеров. Стоит отметить, что из трёх зелёных палочек треугольник сложить всегда можно — см. задачу 10.1.

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

Если третья и четвёртая по величине палочки равны, Иа-Иа может любую из них окрасить в жёлтый цвет; на возможность складывания треугольников это не влияет. Существуют примеры, в которых все палочки различны; но описанные верные примеры также должны оцениваться в 7 баллов.

- 9.2. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy ? (Н. Агаханов)

Ответ. Оно положительно.

Первое решение. Сложив неравенства из условия, получим, что $-x - y > 0$. Перемножив неравенства из условия (это можно делать, поскольку их правые части неотрицательны), получим, что $xy(1 - x - y) > 0$. Выражение в скобках положительно, поэтому произведение xy также положительно.

Второе решение. Очевидно, что ни одно из чисел x и y не может равняться нулю. Предположим, что одно из них (для определенности x) положительно. Тогда из первого нера-

венства в условии получаем $x^2 > x^2 - x > y^2 \geq 0$ и, значит, $x > |y|$. Следовательно, по второму неравенству из условия $y^2 + x > y^2 + |y| \geq y^2 - y > x^2$, поэтому $y^2 > x^2 - x$, что противоречит первому неравенству. Таким образом, наше предположение неверно и среди чисел x и y нет положительных. А значит, они оба отрицательны и $xy > 0$.

Третье решение. Рассмотрим квадратный трехчлен $f(t) = t^2 - t - y^2$. Его корни равны $t_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4y^2}) > 0$ и $t_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4y^2}) < 0$, причем $t_1 > \frac{\sqrt{1 + 4y^2}}{2} > |y|$. Предположим, что $x \geq 0$. Тогда $f(x) > 0$ и, значит, $x > t_1$. Следовательно,

$y^2 - y - x^2 < y^2 - y - t_1^2 = y^2 - y - (t_1 + y^2) = -t_1 - y < -|y| - y \leq 0$. Но это противоречит второму неравенству из условия. Следовательно, $x < 0$. Аналогично доказывается, что $y < 0$ и, значит, $xy > 0$.

Комментарий. Верный ответ без объяснений — 0 баллов.

Доказано только, что $x + y < 0$ — 1 балл.

В условии уже указано, что числа x и y существуют. Поэтому, если доказано, что произведение xy положительно, то примера, подтверждающего возможность этой ситуации, приводить *не надо*. За отсутствие такого примера баллы не снижаются.

Ошибочные преобразования неравенств (возведение в квадрат или перемножение неравенств, знаки частей которых в решении не определены, и т. п.) — не более 1 балла за задачу.

Только за пример, показывающий, что оба числа могут быть отрицательными, баллы не начисляются.

9.3. Рассмотрим такие натуральные числа a , b и c , что дробь

$$k = \frac{ab + c^2}{a + b}$$

является натуральным числом, меньшим a и b . Какое наименьшее количество натуральных делителей может быть у числа $a + b$? (П. Козлов)

Ответ. Три делителя.

Первое решение. Поскольку число $a + b$ больше единицы, оно имеет хотя бы два различных делителя. Докажем, что их не

может быть ровно два, т. е. что число $a + b$ не может быть простым. Домножив равенство из условия на знаменатель, получим $ab + c^2 = ka + kb$ или, что то же самое, $ab - ka - kb + k^2 = k^2 - c^2$. Разложив обе части на множители, придем к соотношению

$$(a - k)(b - k) = (k - c)(k + c).$$

Поскольку $k < a$ и $k < b$, обе скобки в левой части положительны и, значит, $c < k$. Тогда существуют такие натуральные числа x, y, z и t , что

$$a - k = xy, \quad b - k = zt, \quad k - c = xz \quad \text{и} \quad k + c = yt. \quad (*)$$

Например, можно положить $x = \text{НОД}(a - k, k - c)$, $t = \text{НОД}(b - k, k + c)$, $y = (a - k)/x$ и $z = (b - k)/t$. Тогда первые два равенства будут выполнены по определению; с другой стороны, $k - c$ делит xz , а $k + c$ делит yt , поэтому из равенства произведений вытекают написанные равенства.

Следовательно,

$$\begin{aligned} a + b &= (a - k) + (b - k) + (k - c) + (k + c) = \\ &= xy + zt + xz + yt = (x + t)(y + z). \end{aligned}$$

Таким образом, число $a + b$ представляется в виде произведения двух натуральных чисел, больших 1, и, значит, не является простым.

Наконец, несложно увидеть, что $a + b$ может иметь ровно три различных делителя. Например, если $a = 10$, $b = 15$, $c = 5$, то $k = \frac{10 \cdot 15 + 5^2}{10 + 15} = 7$, и $a + b = 25 = 5^2$ имеет три делителя.

Замечание. Ни при каких a и b сумма $a + b$ не может равняться 2^2 и 3^2 . Но для любого простого числа $p \geq 5$ существуют удовлетворяющие условию задачи числа a, b и c , что $a + b = p^2$. Для случая $a \leq b$ все подходящие a, b, c и k имеют вид $a = np$, $b = (p - n)p$, $c = mp$ и $k = np - n^2 + m^2$, где $2 \leq n \leq \frac{p-1}{2}$, $1 \leq m \leq n - 1$. В частности, для $p = 5$ пример единственный с точностью до перестановки местами чисел a и b .

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что число $p = a + b$ не может быть простым. Предположим противное.

Будем считать, что $a \leq b$. Тогда число $kp = ab + c^2 = a(p - a) + c^2 = ap + c^2 - a^2$ делится на p и меньше, чем ap . Следо-

вательно, число $a^2 - c^2 = (a - c)(a + c)$ положительно и кратно p . Тогда первая скобка положительна и $a - c < a + b = p$, поэтому она не делится на p . Вторая скобка также положительна и $a + c < 2a \leq a + b = p$, поэтому она также не делится на p . Мы пришли к противоречию, поэтому предположение неверно. Таким образом, $a + b$ — составное число и, значит, оно имеет хотя бы три делителя.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ и пример, в котором $a + b$ является квадратом простого числа (т. е. у него три делителя) — 2 балла.

Только доказательство того, что число $a + b$ не может быть простым (т. е. у него больше двух делителей) — 4 балла.

Хорошо известно, что количество делителей натурального n , имеющего разложение на простые сомножители вида $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, равно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Если эта формула используется без доказательства — баллы не снижаются.

В первом решении представление (*) читается известным. Если оно используется без доказательства — баллы не снимаются. Если оно используется с *неверным доказательством* — снимается 1 балл.

- 9.4. Окружности Ω и ω касаются друг друга внутренним образом в точке A . Проведем в большей окружности Ω хорду CD , касающуюся ω в точке B (хорда AB не является диаметром ω). Точка M — середина отрезка AB . Докажите, что окружность, описанная около треугольника CMD , проходит через центр ω .

(П. Бибиков)

Первое решение. Обозначим через O центр окружности ω . Проведем через точку A общую касательную к нашим окружностям; пусть она пересекает прямую CD в точке P . Поскольку $PA = PB$, точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , который также проходит через точки M и O .

Поскольку AM — высота в прямоугольном треугольнике PAO , имеем $PM \cdot PO = PA^2$. С другой стороны, по свойству касательной и секущей имеем $PA^2 = PC \cdot PD$. Значит, $PM \cdot PO = PC \cdot PD$. Это и означает, что точки C , D , O и M лежат на одной окружности.

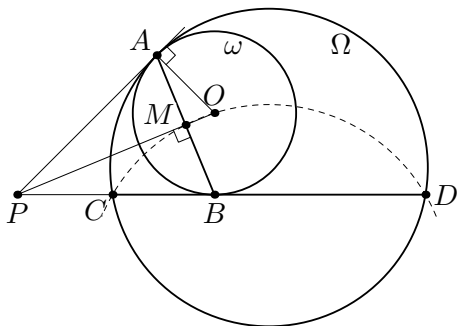


Рис. 1

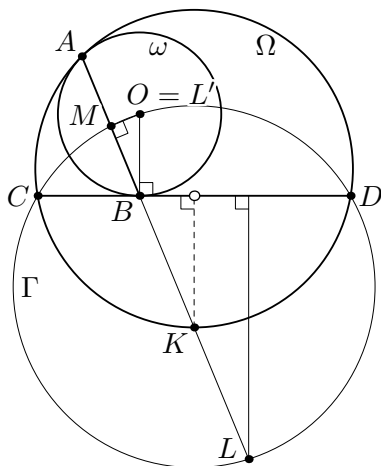


Рис. 2

Второе решение. Пусть O — центр ω . Гомотетия с центром A , переводящая ω в Ω , переводит точку B в точку K окружности Ω , касательная в которой параллельна CD ; иначе говоря, K — середина дуги CD .

Пусть L — точка, симметричная B относительно K . Поскольку точки A, C, K и D лежат на одной окружности, имеем

$$BC \cdot BD = BA \cdot BK = \frac{BA}{2} \cdot 2BK = BM \cdot BL,$$

так что точка L лежит на окружности Γ , описанной около треугольника CMD .

Пусть точка L' диаметрально противоположна L на этой окружности. Тогда проекции точек L и L' на хорду CD симметричны относительно середины CD . Но проекции точек L и B также симметричны относительно неё, поскольку точка K — середина LB — лежит на серединном перпендикуляре к CD . Отсюда $L'B \perp CD$, то есть L' лежит на прямой OB . Кроме того, прямые $L'M$ и OM перпендикулярны ML и потому совпадают. Значит, $O = L'$, и O лежит на Γ .

- 9.5. Петя и Вася играют на доске 100×100 . Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (На ри-

сунке справа показаны возможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4 .) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

(М. Дидин)

Ответ. Выигрывает Петя.

Решение. Приведём одну из возможных выигрышных стратегий для Пети. Он всё время будет делать ходы, параллельные одной из диагоналей доски (назовём её *главной*).

| | | | |
|---|---|--|---|
| | | | |
| | П | | В |
| П | | | В |
| | | | В |

Первым ходом Петя закрасит все клетки главной диагонали. После этого доска разбивается на две одинаковых «лесенки» (см. рис. 6). Мысленно сделаем каждую лесенку симметричной относительно вертикальной прямой, сдвинув в ней каждый горизонтальный ряд, кроме первого, на пол-клетки относительно предыдущего ряда (см. рис. 7).

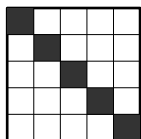


Рис. 3

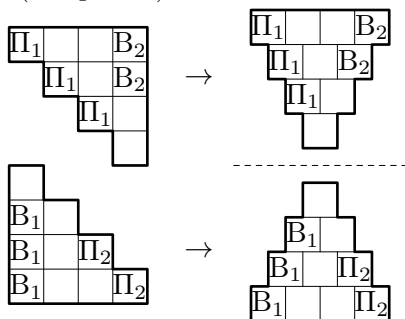


Рис. 4

В результате сдвигов и бывшие вертикали, и бывшие диагонали, параллельные главной, стали наклонными рядами. При этом «вертикали» одной лесенки симметричны «диагоналям» другой. Это значит, что на каждый ход Васи Петя может ответить симметричным ходом в другую лесенку (два таких ответа показаны на рис. 7). Тогда после каждого Петиного хода ситуация на «сдвинутой» картинке будет оставаться симметричной, а значит, Петя всегда сможет сходить согласно описанной стратегии. Так как игра закончится (не более чем за 10^4 ходов), в некоторый момент Васе будет некуда ходить, и Петя выигрывает.

Комментарий. Только верный ответ и, возможно, правильный первый ход Пети — 0 баллов.

То же, с (неверными) попытками устроить симметричную стратегию после первого хода — 1 балл.