

Материалы для проведения
регионального этапа
XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

6 февраля 2021 г.

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, Д. А. Демин, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. Т. Крымский, А. С. Кузнецов, С. А. Лучинин, А. К. Львов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храпцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.



ВВЕДЕНИЕ

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **5 февраля 2021 г.** (I тур) и **6 февраля 2021 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временными регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2020–2021 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

◆

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

11 класс

- 11.6. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6? (О. Подлипский)

Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим остатки от деления чисел, расположенных в четырёх угловых клетках, на 3. По принципу Дирихле, как минимум у двух из этих чисел, x и y , эти остатки совпадут, то есть разность $y - x$ делится на 3. Не умаляя общности, положим $x < y$.

Раскрасим клетки нашей таблицы в шахматном порядке в чёрный и белый цвета так, чтобы угловые клетки были чёрными. Рассмотрим клетки с числами $x, x+3, x+6, \dots, y-3, y$. Любые два из них стоят в клетках с общей стороной — то есть в клетках разного цвета. Значит, все числа в нашей последовательности, имеющие ту же чётность, что и x , стоят в чёрных клетках, а все остальные — в белых. Так как число y стоит в чёрной клетке, оно имеет ту же чётность, что и x , то есть $y - x$ чётно. Значит, $y - x$ делится на 6.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов;

Разбор конкретных примеров расположения чисел не оценивается.

(1) Верно доказано лишь, что разность каких-то двух чисел x и y , расположенных в угловых клетках, делится на три — 2 балла.

(2) Рассмотрена шахматная раскраска и замечено, что числа, отличающиеся на 3, стоят в клетках разных цветов — 2 балла.

(3) После этого замечено, что все угловые клетки одного цвета, и *утверждается*, что тогда числа в клетках x и y одной чётности — ещё 2 балла.

Баллы за продвижения (1)–(3) суммируются. Заметим, что доказательство чётности разности $x - y$ может быть проведено

и без использования шахматной раскраски — такое доказательство должно быть оценено соответственно.

Ниже приведены некоторые примечания по поводу них, а также некоторые ошибки, которые могут встретиться в работах.

(1') После получения (1) без обоснования утверждается, что числа x и y одной чётности — баллы не добавляются.

(2') Идея шахматной раскраски отдельно не оценивается.

(3') Даже после получения (2) и (3) утверждение о том, что x и y имеют одну чётность, *нуждается* в небольшом обосновании. Именно, требуется хотя бы упомянуть, что существует путь от x до y , на котором числа в соседних клетках отличаются на 3. (Такое упоминание может быть неявным, например, в индукционном рассуждении.) Если такого упоминания нет, за задачу ставится не более 6 баллов. В частности, критерии (1)–(3) как раз дают сумму 6.

Некоторые участники могут считать, что разность *любых* двух чисел в соседних клетках равна 3. Этот факт неверен; все рассуждения, опирающиеся на этот факт, оцениваются в 0 баллов.

Некоторые участники могут из утверждения, что любые числа, отличающиеся на 3, стоят в клетках разного цвета (в шахматной раскраске), сделать (неверный!) вывод, что *любые* два соседних числа имеют разную чётность. Если в работе присутствует подобная ошибка, за задачу выставляется не более 5 баллов. (5 баллов выставляется

							81		80
	2								
	6	5							
	3								
	1	4							
									79

Рис. 5

только тогда, когда этот аргумент применяется лишь к числам, имеющим один остаток при делении на 3.)

- 11.7. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC , M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая ℓ , параллельная стороне AC , и на неё опущены перпен-

дикуляры AP и CQ . Докажите, что точки M , N , P и Q лежат на одной окружности. (Р. Женодаров, О. Дмитриев)

Решение. Пусть углы BAC и BCA треугольника ABC равны, соответственно 2α и 2γ . Углы API и AMI — прямые, поэтому точки A , P , M , I лежат на одной окружности с диаметром AI . Тогда $\angle AMP = \angle AIP =$ (в силу параллельности) $= \angle IAC = \alpha$. Аналогично $\angle QNC = \gamma$. Из равнобедренного треугольника MBN находим: $\angle BMN = \frac{180^\circ - \angle MBN}{2} = \alpha + \gamma$. Тогда $\angle PMN = \angle PMA + (180^\circ - \angle BMN) = 180^\circ - \gamma$. Но $\angle PQN = \angle ICN = \gamma$, значит, сумма углов PMN и PQN равна 180° , то есть точки M , N , P и Q лежат на одной окружности.

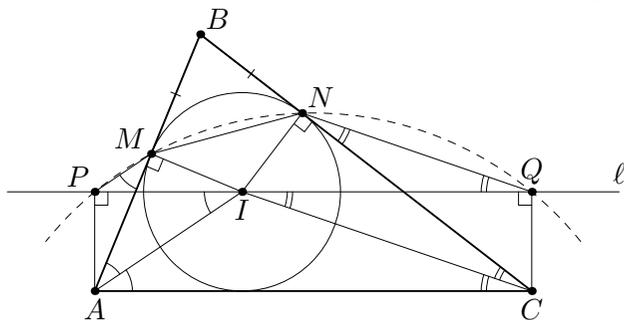


Рис. 6

Замечание. Центр окружности, описанной около четырёхугольника $PMNQ$ — это середина дуги AC окружности, описанной около треугольника ABC .

Комментарий. Показано, что точки A , P , M , I лежат на одной окружности (или аналогичное утверждение) — 1 балл.

- 11.8. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

(Д. Храмов)

Ответ. $2n + 1$.

Первое решение. Назовём *длиной* слова количество букв в нём. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — буквы алфавита. Тогда нетрудно

проверить, что хорошим является слово

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_2 a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

Осталось показать, что нет хороших слов большей длины.

Предположим, что в n -буквенном алфавите существует хорошее слово длины $2n + 2$. Тогда какая-то буква (скажем, a_1) встречается в нём хотя бы три раза. Отметим её второе (V) и предпоследнее (P) вхождение в слово (тогда V стоит не правее, чем P).

Любая другая буква встречается не более одного раза перед P , а также не более одного раза после V , иначе вычёркиванием можно получить запрещённую последовательность. Значит, каждая из букв a_2, \dots, a_n встречается не более двух раз. Более того, если такая буква и встречается дважды, то одно из её вхождений стоит до V , а другое — после P .

Пусть a_1 встречается $k \geq 3$ раз. Тогда между V и P стоят хотя бы $k - 3$ буквы, отличных от a_1 (по одной между соседними вхождениями a_1), и все такие буквы встречаются ровно по разу. Выделим $k - 3$ таких буквы. Остальные $n - k + 2$ букв могут встречаться максимум по два раза. Поэтому длина слова не превосходит

$$k + (k - 3) \cdot 1 + (n - k + 2) \cdot 2 = 2n + 1,$$

что противоречит нашему предположению.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что длина хорошего слова не превосходит $2n + 1$. Индукция по $n \geq 2$. В базовом случае $n = 2$ буквы в слове чередуются, и слово длины хотя бы 6 содержит фрагмент вида $ababab$, из которого вычёркиванием букв можно получить $aabb$.

Для перехода предположим, что в n -буквенном алфавите есть хорошее слово длины, не меньшей $2n + 2$. Тогда какая-то буква a встречается в этом слове хотя бы три раза. Предположим, что букв, встречающихся хотя бы 3 раза, две — a и b . Пусть, без ограничения общности, второе вхождение a стоит раньше второго вхождения b ; тогда вычёркиванием букв можно получить слово $aabb$, что невозможно.

Значит, буква a встречается в слове $k \geq 3$ раз, а все осталь-

ные — максимум по два раза. Тогда длина слова не меньше, чем $2n + 2$, и не больше, чем $k + 2(n - 1)$, откуда $k \geq 4$.

Между вторым и третьим вхождением буквы a есть какая-то буква c . Эта буква не может встречаться в других местах: если она встречается после второго вхождения a , то вычёркиванием букв можно получить $aacc$, а если до него — то $csaa$ (поскольку $k \geq 4$).

Пусть соседи буквы c различны. Тогда, удалив её из слова, мы получим хорошее слово в $(n - 1)$ -буквенном алфавите (без буквы c). Длина этого слова будет не меньше $2n + 1 = 2(n - 1) + 3$, что противоречит индукционному предположению.

Если же соседи буквы c одинаковы, удалим из слова c и букву перед ней; тогда на этом «стыке» останутся различные буквы. Поэтому мы опять получим хорошее слово в $(n - 1)$ -буквенном алфавите, длина которого не меньше, чем $2(n - 1) + 2$; это опять же невозможно по индукционному предположению.

Комментарий. Только пример хорошего слова из $2n + 1$ букв — 1 балл (этот балл может суммироваться с упомянутыми далее).

Только доказательство, что в хорошем слове не более $2n + 1$ букв — 6 баллов.

При доказательстве этой оценки доказано лишь, что максимум одна буква встречается более двух раз — 2 балла (из 6); эти баллы могут складываться с баллами за пример.

- 11.9. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет степень 10^5 , а его старший коэффициент равен 1. Найдите наименьшую возможную степень многочлена

$$R(x) = P(x^{1000} + 1) - P(x)^{1000}.$$

(И. Богданов)

Ответ. $99 \cdot 10^6$.

Первое решение. Обозначим $n = 1000$, $k = 100$, то есть степени рассматриваемых многочленов P равны nk .

Лемма. *Существует единственный многочлен P степени nk (со старшим коэффициентом 1) такой, что степень полученного многочлена R будет меньше, чем $nk(n - 1)$.*

Доказательство. Запишем наш многочлен как

$$P(x) = x^{nk} + p_1x^{nk-1} + p_2x^{nk-2} + \dots + p_{nk}.$$

Обозначим $F(x) = P(x^n + 1)$ и $G(x) = P(x)^n$; это — многочлены степени n^2k со старшим коэффициентом 1.

В многочлене $F(x)$ коэффициент p_j участвует лишь в членах степени, не большей $n(nk - j)$. Значит, для любого $i = 1, 2, \dots, nk$ коэффициент при x^{n^2k-i} в многочлене $F(x)$ зависит лишь от коэффициентов p_j при $j \leq i/n < i$. С другой стороны, коэффициент при этой же степени в $G(x)$ есть $np_i + A$, где A зависит лишь от коэффициентов p_j при $j < i$. Если мы хотим, чтобы степень R была меньше, чем $nk(n - 1)$, то эти коэффициенты должны быть равны; это равенство даёт однозначное выражение p_i через p_1, p_2, \dots, p_{i-1} (в частности, p_1 находится единственным образом). Значит, из этих равенств по очереди находятся все коэффициенты многочлена $P(x)$. \square

Теперь достаточно предъявить многочлен $P(x)$ такой, что степень R окажется меньше, чем $nk(n - 1)$ — по лемме, он единственный, и он и даст минимальную степень R . Положим $P(x) = (x^n + 1)^k$. Тогда многочлен

$$\begin{aligned} R(x) &= ((x^n + 1)^n + 1)^k - (x^n + 1)^{nk} = \\ &= k \cdot (x^n + 1)^{n(k-1)} + C_k^2 (x^n + 1)^{n(k-2)} + \dots \end{aligned}$$

имеет степень всего лишь $n^2(k - 1) < nk(n - 1)$. Значит, наименьшая возможная степень R и есть $n^2(k - 1) = 99 \cdot 10^6$.

Замечание. В решении выше искомый многочлен «угадан». Это можно сделать, рассмотрев достаточно «маленький» случай (например, $k = 2$). Другой способ найти требуемый многочлен виден в следующем решении.

Второе решение. Используем те же обозначение n и k , что и в первом решении. Мы будем считать, что

$$\deg R < n^2k - nk \tag{*}$$

(впоследствии мы увидим, что это возможно; поэтому для многочлена R минимальной степени так считать можно).

Предположим, что в многочлене $P(x)$ есть одночлен степени, не кратной n ; пусть $a_s x^s$ — такой одночлен наибольшей степени. Тогда коэффициент многочлена R при $x^{nk(n-1)+s}$ равен $-na_s$, что противоречит (*).

Таким образом, в предположении (*), степени всех одночленов в $P(x)$ кратны n ; иначе говоря, существует такой многочлен Q , что $P(x) = Q(x^n)$. Тогда

$$R(x) = P(x^n + 1) - P(x)^n = Q((x^n + 1)^n) - Q(x^n)^n,$$

то есть $R(x) = R_1(x^n)$, где

$$R_1(y) = Q((y + 1)^n) - Q(y)^n;$$

при этом $\deg Q = k < n$, а предположение (*) означает, что $\deg R_1 < nk - k$.

Рассмотрим многочлен $R_2(x) = R_1(x - 1) = Q(x^n) - Q(x - 1)^n$ (тогда $\deg R_2 = \deg R_1$). Аналогично рассуждению выше, предположим, что $Q(x - 1) \neq x^k$, то есть в многочлене $Q(x - 1)$ есть одночлены, кроме x^k ; пусть $b_t x^t$ — такой одночлен наибольшей степени. Тогда в многочлене $R_2(x)$ есть одночлен $-nb_t x^{nk-k+t}$, что противоречит неравенству $\deg R_2 < nk - k$. Таким образом, $Q(x - 1) = x^k$, а тогда $Q(x) = (x + 1)^k$ и $P(x) = (x^n + 1)^k$. Мы приходим к тому же примеру, что и в первом решении (и видим, что в этом случае степень R действительно удовлетворяет (*)).

Комментарий. Перечисленные ниже баллы за различные продвижения не складываются друг с другом.

Приведён лишь верный пример многочлена P , для которого $\deg R = n^2(k - 1)$, без доказательства его оптимальности — 3 балла.

Доказано только, что в *оптимальном* многочлене P нет одночленов степени, не делящейся на n (условие оптимальности может быть заменено на разумные предположения о степени R , как во втором решении) — 1 балл.

Доказано только, что существует ровно один многочлен P , удовлетворяющий условию, при котором $\deg R < nk(n - 1)$ — 2 балла.

- 11.10. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа x, y, z на доске стираются, а вместо них выписываются числа $x + \frac{1}{yz}$, $y + \frac{1}{zx}$, $z + \frac{1}{xy}$. Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел.

(С. Кудря)

Первое решение. Заметим сразу, что все числа, появля-

ющиеся на доске, положительны и рациональны. Пусть x_n, y_n, z_n — числа на доске после n минут, а $a = x_0, b = y_0, c = z_0$ — исходные числа.

Положим $F_n = 1 + \frac{1}{x_n y_n z_n}$. Тогда $x_{n+1} = x_n F_n, y_{n+1} = y_n F_n$ и $z_{n+1} = z_n F_n$. В частности, $\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{y_n}{x_n} = \dots = \frac{b}{a}$ и, аналогично, $\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{c}{a}$.

Положим $\Pi_n = x_n y_n z_n$, и пусть $\Pi_n = \frac{p_n}{q_n}$ — представление этого числа в виде несократимой дроби. Тогда $F_n = \frac{p_n + q_n}{p_n}$, и потому

$$\Pi_{n+1} = \Pi_n F_n^3 = \frac{(p_n + q_n)^3}{p_n^2 q_n},$$

где последняя дробь также несократима (ибо p_n и q_n взаимно просты). Итак, $p_{n+1} = (p_n + q_n)^3$ и $q_{n+1} = p_n^2 q_n$. В частности, $p_n = (p_{n-1} + q_{n-1})^3 \geq (1 + 1)^3 = 8$ при $n \geq 1$, и потому $q_n \geq 8^2 q_{n-1} > q_{n-1}$ при $n \geq 2$. Иными словами, последовательность q_1, q_2, q_3, \dots строго возрастает.

Обозначим через D произведение всех числителей и знаменателей чисел a, b и c . Тогда при некотором N имеем $q_N > D^2$. Докажем, что с N -й минуты все числа на доске нецелые. Действительно, пусть, скажем, x_n — целое при $n \geq N$. Тогда $y_n = x_n \cdot \frac{b}{a}, z_n = x_n \cdot \frac{c}{a}$, и потому

$$\Pi_n = x_n^3 \cdot \frac{bc}{a^2}.$$

Знаменатель этого числа в несократимой записи делит D^2 ; но это невозможно, ибо $q_n \geq q_N > D^2$. Противоречие.

Замечание. Поскольку на $(n + 1)$ -й минуте знаменатель произведения $\Pi = xyz$ увеличивается в p_n^2 раз, а знаменатель каждого из чисел x, y, z (в несократимой записи) увеличивается не более чем в p_n раз (ибо $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{p_n + q_n}{p_n}$), может возникнуть иллюзия, что знаменатель каждого из чисел x, y, z не уменьшается. Это не так: например, при $x_n = \frac{4}{3}, y_n = \frac{3}{2}, z_n = \frac{1}{7}$ получаем $\Pi_n = \frac{2}{7}$, и потому $x_{n+1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2} = 6$ имеет меньший знаменатель, чем x_n (и является целым, хотя на предыдущем шаге целых чисел не было).

Призываем быть внимательными к подобным аргументам. (Объяснение «парадокса» простое: знаменатель числа Π может быть существенно меньше, нежели произведение знаменателей чисел x , y и z .)

Второе решение. Мы используем те же обозначения x_n , y_n , z_n , $\Pi_n = \frac{p_n}{q_n}$ и $F_n = 1 + \frac{1}{\Pi_n}$, что и в первом решении, вместе с формулами

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n F_n, & y_{n+1} &= y_n F_n, & z_{n+1} &= z_n F_n, \\ p_{n+1} &= (p_n + q_n)^3, & q_{n+1} &= p_n^2 q_n. \end{aligned} \quad (*)$$

Обозначим $r_n = p_n + q_n$; тогда $p_{n+1} = r_n^3$.

Из соотношения $q_{n+1} : p_n q_n$ получаем, что $q_n : p_k$ при $n > k$. Поскольку q_n взаимно просто с p_n , получаем, что все числа p_1, p_2, p_3, \dots попарно взаимно просты и больше 1. Поэтому какое-то из них (назовём его p_s) делится на некоторое простое число p , большее всех числителей и знаменателей чисел a , b и c .

Число p не делит ни одно из чисел $p_0, p_1 = r_0^3, \dots, p_{s-1} = r_{s-2}^3$; также оно не делит числители и знаменатели чисел a , b и c . Из формул (*) получаем теперь, что p не делит также числа $q_0, q_1, q_2, \dots, q_s$, а также числители и знаменатели чисел F_0, F_1, \dots, F_{s-2} ; поэтому числители и знаменатели чисел x_i, y_i, z_i при $i < s$ также не делятся на p .

Пусть p^t — максимальная степень p , делящая r_{s-1} . Тогда числители чисел $x_s = x_{s-1} F_s$, $y_s = y_{s-1} F_s$ и $z_s = z_{s-1} F_s$ также делятся ровно на p^t . С другой стороны, $p_s : p^{3t}$, так что знаменатели чисел x_{s+1}, y_{s+1} и z_{s+1} делятся на p^{2t} . Наконец, при $n > s$ числитель r_n числа F_n делит p_{n+1} и потому взаимно прост с p ; значит, знаменатели всех чисел x_i при $i \geq s+1$ делятся на p^{2t} , а значит — нецелые.

Комментарий. Замечено, что все числа домножаются на $F = 1 + \frac{1}{xyz} - 1$ балл

Введены числа $\Pi_n = x_n y_n z_n = p_n / q_n$ и доказаны формулы, выражающие p_n и q_n через p_{n-1} и $q_{n-1} - 1$ балл (суммируется с предыдущим).