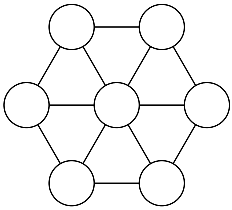
8 класс (решения)

Задача 8.1. Глеб расставил числа 1, 2, 7, 8, 9, 13, 14 в вершины и центр правильного шестиугольника так, что в любом из 6 равносторонних треугольников сумма чисел в вершинах делится на 3. Какое число Глеб мог записать в центр? Достаточно привести один подходящий пример.



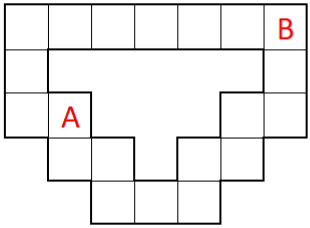
Ответ: 9.

Решение. Сложим суммы чисел во всех шести треугольниках; обозначим полученную величину за X. С одной стороны, X делится на 3, так как каждое слагаемое делилось на 3 по условию. С другой стороны, каждое число, стоящее в вершине шестиугольника, вошло в X дважды (из двух треугольников), а центральное число вошло в неё 6 раз. Вычтя из X удвоенную сумму всех чисел, которая равна $2 \cdot 54$, получим учетверённое центральное число.

Делимость на 3 при этом, как легко видеть, сохранится. Это означает, что в центре стоит число, кратное 3. Такое число у нас только одно — это 9.

Остальные числа можно расставить по периметру шестиугольника так, чтобы их остатки от деления на 3 чередовались; например, в порядке 1, 2, 7, 8, 13, 14. □

Задача 8.2. Миша предложил Юле передвинуть фишку из клетки A в клетку B. За один шаг можно передвинуть фишку в соседнюю по стороне или по углу клетку. Чтобы было интереснее, Миша положил 30 конфет в призовой фонд, но сказал, что будет забирать по 2 конфеты за каждый горизонтальный или вертикальный ход и по 3 конфеты за каждый диагональный ход. Оставшиеся конфеты Юля получает в награду. Какое максимальное количество конфет может выиграть Юля?

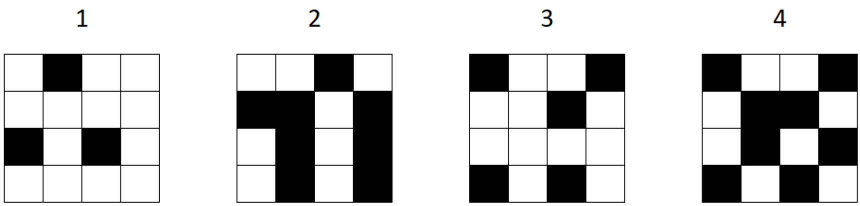


Ответ: 14.

Решение. От A до B можно добраться через верх или через низ. Если идти через верх, то первые 2 хода диагональные (диагональный ход выгоднее, чем 2 горизонтальных), а следующие 5 горизонтальные. Миша заберёт $2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 16$ конфет, и Юля выиграет 14. Если же идти через низ, то первые 5 ходов диагональные, а последний вертикальный. В этом варианте Миша заберёт $5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 17$ конфет, Юля выиграет 13 конфет. Получаем, что первый вариант выгоднее и выигрыш составит 14 конфет. □

Задача 8.3. Учитель нарисовал на доске 4 таблицы 4×4. Он вызвал к доске Альберта, Богдана, Вадима и Дениса. Каждый из мальчиков выбрал себе одну таблицу. Альберт и Богдан просто закрасили некоторые клетки своих таблиц. Вадим закрасил на своей таблице только те клетки, которые были не закрашены и у Альберта, и у Богдана. Денис аналогично закрасил только те клетки, которые были не закрашены и у Богдана, и у Вадима.

Мальчики сели на место и учитель увидел на доске такие 4 таблицы. Помогите учителю определить какая таблица кому принадлежит.



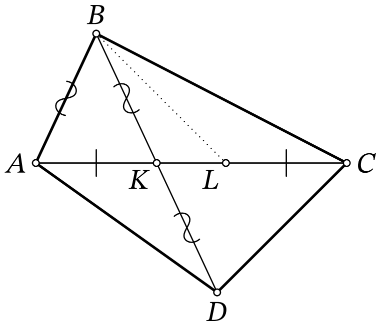
Ответ: Альберт — 4, Богдан — 2, Вадим — 1, Денис — 3.

Решение. Будем называть две таблицы *пересекающимися,* если есть клетка, которая закрашена на обеих. Вадим закрасил на своей таблице только те клетки, которые были не закрашены и у Альберта, и у Богдана, а это значит, что таблица Вадима не пересекается с таблицами Альберта и Богдана. Аналогично таблица Дениса не пересекается с таблицами Богдана и Вадима. Получается, что пересекаться может только таблица Альберта с таблицами Богдана и Дениса.

Под номером 1 единственная доска, которая ни с кем не пересекается, значит, это доска Вадима. Под номером 4 доска, пересекающаяся с двумя досками (2 и 3), значит, это доска Альберта.

Осталось выяснить, принадлежит Богдану доска 2 или 3. Вспомним, что доска Вадима должна содержать все клетки, которых нет ни у Альберта, ни у Богдана. Под это условие в качестве доски Богдана подходит только 2-я доска. Тогда Денису остаётся доска с номером 3. $\square$

Задача 8.4. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Оказалось, что $AB = BK = KD$. На отрезке KC отметили такую точку L, что $AK = LC$. Найдите $\angle BLA$, если известно, что $\angle ABD = 52^\circ$ и $\angle CDB = 74^\circ$.



Ответ: 42.

Решение. Треугольник ABL равен треугольнику KDC ($AL = KC$, $AB = KD$ и $\angle BAK = \angle BKA = \angle DKC$). Имеем

$$\angle BLA = 180^\circ - \angle BAL - \angle ABL = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle ABD}{2} - \angle CDB =$$
$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABD - \angle CDB = 42^\circ\,. \qquad \square$$

Задача 8.5. Поле частично засадили кукурузой, овсом и пшеном. Если оставшуюся часть полностью засадить пшеном, то пшено будет занимать половину всего поля, а если оставшуюся часть поровну поделить между овсом и кукурузой, то овёс будет занимать половину всего поля. Во сколько раз увеличится количество кукурузы, если оставшуюся часть полностью засадить кукурузой?

Ответ: 3.

Решение. Обозначим площадь всего поля за 1, а пустую часть за x. Тогда из перового условия пшено занимает $\frac{1}{2} - x$, а из второго овёс занимает $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$.

Кукурузе остается $1 - x - (\frac{1}{2} - x) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}x$. Если к этому добавить x, получится $\frac{3}{2}x$, то есть площадь, засеянная кукурузой, увеличится в три раза. □

Задача 8.6. У 6 принцесс есть волшебный сундук. Раз в минуту из него можно достать платье, которое будет одного из 10 цветов и одного из 9 фасонов. При этом в течение одного часа не получится достать из сундука два платья, у которых совпадают и цвет, и фасон. Какое минимальное количество платьев принцессам придётся достать из сундука, чтобы гарантированно получить 6 разноцветных платьев одного фасона?

Ответ: 46.

Решение. Заметим, что 45 платьев не хватит, так как сундук может выдать ровно по 5 платьев каждого из 9 фасонов.

Докажем, что если принцессы достанут 46 платьев, то обязательно найдётся 6 платьев одного фасона, а значит, разного цвета (одинаковых платьев в течение 46 минут быть не могло). Действительно, если бы это было не так, то платьев каждого фасона было бы не более 5, а значит, всего было бы не более 45 платьев; противоречие. □

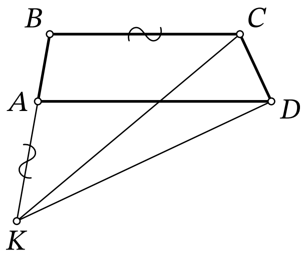
Задача 8.7. Вдоль аллеи в один ряд высадили клёны и лиственницы, всего 75 деревьев. Известно, что нет двух клёнов, между которыми растёт ровно 5 деревьев. Какое наибольшее количество клёнов могло быть высажено вдоль аллеи?

Ответ: 39.

Решение. Разобьём все деревья на группы по 12 стоящих подряд. Будет 6 полных групп и ещё 3 дерева в конце. В каждой группе деревья разобьём на 6 пар: первое с седьмым, второе с восьмым, ..., шестое с двенадцатым. Заметим, что между деревьями в одной паре ровно 5 других деревьев, а значит, в этой паре максимум один клён. Получаем, что в каждой группе из 12 подряд стоящих деревьев не более 6 клёнов, следовательно, всего не более $6 \cdot 6 + 3 = 39$ клёнов.

Осталось показать, что 39 клёнов можно было высадить. Будем чередовать группы из 6 клёнов с группами из 6 лиственниц; в конце высадим группу из трёх клёнов. Тогда понятно, что между двумя клёнами в одной группе будет не более 4 деревьев, а между двумя клёнами из разных групп не менее 6. □

Задача 8.8. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle ABC = 108^\circ$ и $\angle ADC = 54^\circ$. На луче BA за точкой A отметили точку K такую, что $AK = BC$. Найдите угол DKC, если известно, что $\angle BKC = 27^\circ$.



Ответ: 18.

Решение. Докажем, что треугольники BKC и ADC равны. Имеем $\angle KBC = \angle DAK$ и $BC = AK$; осталось показать, что $BK = AD$.

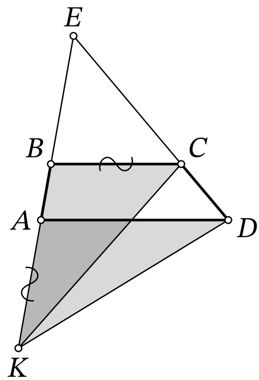


Рис. 1: к решению задачи 8.8

Для этого продлим AB и DC до пересечения в точке E (рис. 1). Треугольник BEC равнобедренный, так как $\angle BEC = \angle ABC - \angle BCE = \angle ABC - \angle ADC = 54^\circ = \angle ECB$. Треугольник AED тогда тоже равнобедренный, так как его углы равны углам треугольника BEC из параллельности. Получаем $AD = AE = AB + BE = AB + BC = AB + AK = BK$, что завершает обоснование равенства треугольников BKC и ADC.

Теперь, зная, что $\angle AKD = \angle BCK$, нетрудно вычислить искомый угол:

$$\begin{aligned}\angle DKC =& \angle AKD - \angle BKC = \angle BCK - \angle BKC = (180^\circ - \angle KBC - \angle BKC) - \angle BKC = \\ =& 180^\circ - \angle ABC - 2\angle BKC = 18^\circ\,.\end{aligned}$$ □