

Материалы для проведения
заключительного этапа
XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Первый день

Тюмень,
17–18 апреля 2021 г.

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.



9 класс

- 9.1. На окружности отмечено 1000 точек, каждая окрашена в один из k цветов. Оказалось, что среди любых пяти попарно пересекающихся отрезков, концами которых являются 10 различных отмеченных точек, найдутся хотя бы три отрезка, у каждого из которых концы имеют разные цвета. При каком наименьшем k это возможно? (С. Берлов)
- 9.2. Пусть n — натуральное число. Целое число $a > 2$ назовём n -разложимым, если $a^n - 2^n$ делится на каждое число вида $a^d + 2^d$, где d — натуральный делитель n , отличный от n . Найдите все составные натуральные n , для которых существует n -разложимое число. (С. Кудря)
- 9.3. На прямой отмечено $n + 1$ различных отрезков; одна из точек прямой принадлежит всем этим отрезкам. Докажите, что среди отмеченных отрезков можно выбрать различные отрезки I и J , пересекающиеся по отрезку длины, не меньшей $\frac{n-1}{n}d$, где d — длина отрезка I . (И. Богданов, В. Уфнаровский)
- 9.4. На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка D , а на продолжении стороны BC за точку C — точка E . Оказалось, что прямая, проходящая через E и параллельная AB , касается окружности, описанной около треугольника ADC . Докажите, что одна из касательных, проведённых из точки E к описанной окружности треугольника BDC , отсекает от угла ABE треугольник, подобный треугольнику ABC . (А. Кузнецов, С. Берлов)