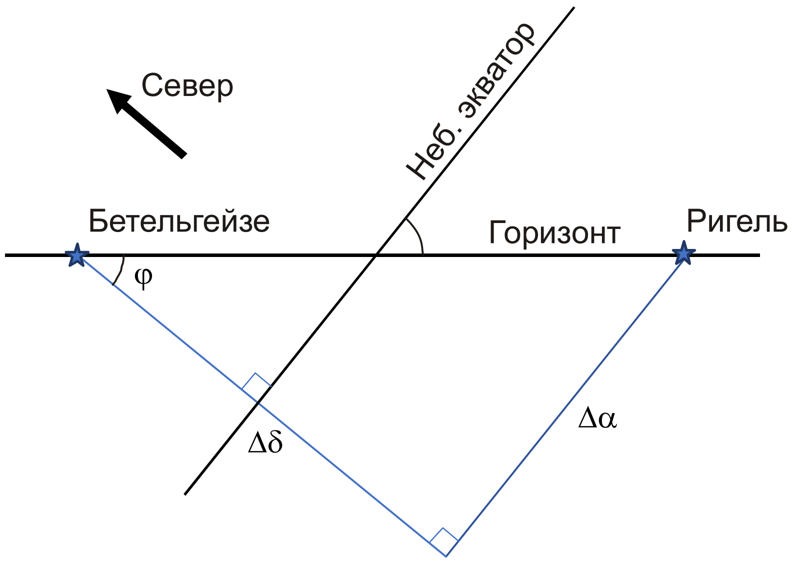
10 класс

10.1. Условие. В некотором пункте на поверхности Земли звезды Бетельгейзе и Ригель в созвездии Ориона взошли одновременно. Экваториальные координаты Бетельгейзе $05^{ч}55.2^{м}$, $+7°24'$; координаты Ригеля $05^{ч}14.5^{м}$, $-8°12'$. Найдите широту места наблюдения. Атмосферной рефракцией пренебречь.

10.1. Решение. В момент одновременного восхода Бетельгейзе и Ригель одновременно пересекли линию горизонта, плоскость которого образует с плоскостью небесного экватора угол $90°-\varphi$, где φ – широта места наблюдения. Точка пересечения находится между этими звездами, на небольшом угловом расстоянии от каждой из них. Поэтому картину вполне можно считать плоской. Построим чертеж, пренебрегая кривизной рассматриваемого участка небесной сферы:



Наблюдатель, очевидно, находится в северном полушарии, поскольку северный полюс мира находится над горизонтом. Из геометрии чертежа видно, что

$$\tan\varphi = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta},$$

где $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ – разность координат Бетельгейзе и Ригеля. Отсюда

$$\varphi = \arctan\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} = 33^{\circ}.$$

10.1. Система оценивания. Приведенный выше способ решения не является единственным. Задание можно решить напрямую, используя формулы сферической тригонометрии. Правильное решение в этом случае необходимо засчитывать полностью (8 баллов). В случае ошибок в записи самих формул максимальная оценка за все решение не превышает 4 баллов, при ошибках вычисления при правильных формулах оценка не превышает 6 баллов. При способе решения, описанном выше, система оценивания следующая:

1 этап – 2 балла: правильная связь горизонтальной и экваториальной системы координат (угол наклона одной к другой), выраженная рисунком или формулой.

2 этап – 3 балла: запись соотношения широты и разности координат звезд. Засчитывается только при правильной формуле, в других случаях этап не засчитывается.

3 этап – 3 балла: значение широты. Засчитывается при верном решении. При правильных формулах и ошибке больше 5° выставляется 2 балла, при ошибке больше 10° этап не засчитывается. Если широта записана с неверным знаком или допускается ответ с двумя знаками широты, то при правильном модуле широты этап оценивается в 1 балл, иначе этап не засчитывается.

10.2. Условие. Между восточной квадратурой и последующей западной квадратурой некоторой планеты проходит в 1.143 раз больше времени, чем между ее западной и последующей восточной квадратурой. Что это за планета? Орбиты планет считать круговыми.

10.2. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задание 9.2.

10.3. Условие. Желая испытать новое сверхмощное импульсное оружие, а также привести в порядок календарь, жители Земли решили отодвинуть Луну от нашей планеты так, чтобы тропический год содержал ровно 12 синодических лунных месяцев (циклов смены лунных фаз). Какое минимальное значение эксцентриситета нужно будет задать новой лунной орбите, чтобы у землян хотя бы иногда осталась возможность наблюдать полные солнечные затмения с поверхности планеты? Орбиту Земли считать неизменной в ходе испытания. Направление вращения Луны вокруг Земли также сохраняется прежним.

10.3. Решение. Требуемая длительность синодического лунного месяца S' есть 1/12 от тропического года T_0 или 30.437 дня. Тогда длительность сидерического лунного месяца (оборота Луны вокруг Земли) будет

$$T' = \frac{S'T_0}{S'+T_0} = \frac{T_0}{13} = 28.096 \text{ сут}.$$

Сравнивая его с настоящим периодом T, мы применяем III закон Кеплера и находим новое среднее расстояние до Луны:

$$L' = L\left(\frac{T'}{T}\right)^{2/3} = 391.6 \text{ тыс. км}.$$

Отметим, что и в настоящее время Луна может располагаться на таком расстоянии от Земли. Так как в условии задачи требуется, чтобы у землян хоть когда-нибудь была возможность наблюдать полное солнечное затмение, мы рассмотрим наиболее благоприятный случай. Пусть Земля находится в афелии своей орбиты, при этом во время затмения Солнце и Луна располагаются в зените. Тогда угловой радиус Солнца будет равен

$$\rho = \frac{R_\mathrm{S}}{a(1+e_0)} = 0.00458 \text{ рад}.$$

Здесь R_S – радиус Солнца, a – среднее расстояние от Земли до Солнца, e_0 – эксцентриситет орбиты Земли. Приближение наблюдателя к Солнцу за счет размеров Земли здесь несущественно, но в случае Луны оно уже будет играть роль. Чтобы полное солнечное затмение случилось, Луна в перигее в зените должна иметь хотя бы такой же угловой радиус:

$$\rho = \frac{R_\mathrm{L}}{L'(1-e) - R_\mathrm{E}}.$$

Здесь R_E и R_L – радиусы Земли и Луны. Отсюда получаем минимальное значение эксцентриситета лунной орбиты:

$$e = \frac{R_\mathrm{S}(L' - R_\mathrm{E}) - R_\mathrm{L}a(1+e_0)}{L'R_\mathrm{S}} = 0.015.$$

Получается, что лунная орбита может быть почти круговой, и сохранение нынешнего эксцентриситета также позволит землянам наблюдать полные солнечные затмения.

10.3. Система оценивания.

1 этап – 2 балла: определение большой полуоси орбиты Луны для выполнения условия задания. Оба балла не выставляются, если участник путает синодический и сидерический периоды Луны. В случае арифметической ошибки при правильных формулах ($T'=T_0/13$ и выражение III закона Кеплера) выставляется 1 балл.

2 этап – 6 баллов: определение минимального эксцентриситета орбиты Луны. Оценка зависит от учета двух факторов, важных для условий наступления полного солнечного затмения – эллиптичности орбиты Земли (добавка $+e_0$ во втором составляющем числителя) и приближения наблюдателя к Луне (добавка $-R_E$ в первом слагаемом). Учет каждого из слагаемых оценивается по 2 балла. При этом учет каждого из факторов не засчитывается (оба балла не выставляются), если они записаны с противоположным знаком. Решение второго этапа без учета или с неправильным учетом этих слагаемых оценивается не выше 2 баллов.

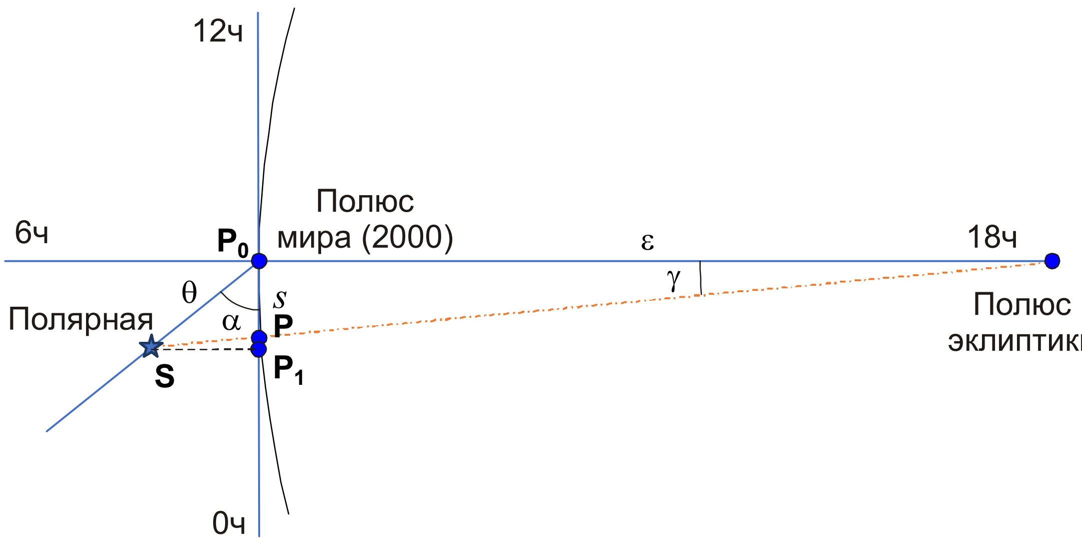
Если первый или второй этап был выполнен с ошибкой, в результате которой на втором этапе получается вывод, что эксцентриситет может быть любым, даже нулевым, либо же он должен быть большим, не менее 0.1, общая оценка не может превышать 2 баллов.

10.4. Условие. Опытный наблюдатель с отличным зрением заметил, что при визуальных наблюдениях в некоторый телескоп с хорошим качеством оптики фон неба ослаб вдвое по сравнению с наблюдениями невооруженным глазом, а разрешающая способность (по двойным звездам) при спокойных атмосферных условиях составила 2″. Определите диаметр объектива телескопа и используемое увеличение.

10.4. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.4.

10.5. Условие. В настоящее время положение северного полюса мира отмечает собой довольно яркая звезда α Малой Медведицы (Полярная). 1 января 2000 года ее экваториальные координаты – прямое восхождение и склонение – были равны соответственно $02^{ч}31^{м}48.7^{с}$, $+89°15'51.0''$. Из-за прецессии земной оси с периодом 25776 лет положение Северного полюса мира медленно изменяется. Определите, в каком году полюс пройдет мимо Полярной на минимальном угловом расстоянии. Оцените это угловое расстояние. Собственное движение звезды и нутацию не учитывать.

10.5. Решение. Северный полюс мира описывает вследствие прецессии окружность вокруг Северного полюса эклиптики в созвездии Дракона, с радиусом ε=23.4° и заданным периодом. Изобразим это движение:



Решение можно производить с различной степенью точности. Пренебрежем кривизной рассматриваемого участка небесной сферы (в районе полюса мира) и рассмотрим две разных по точности модели. В одной из них полюс мира движется по окружности с центром в полюсе эклиптики, а в другой – по касательной к ней прямой (см. рисунок). В этих двух случаях максимальное сближение с Полярной звездой произойдет в точках **P** и $\mathbf{P_1}$ соответственно. Обозначим текущее угловое расстояние Полярной звезды от полюса мира (90°–δ) как θ. Из теоремы косинусов определим расстояние от Северного полюса эклиптики до Полярной:

$$\rho^2 = \varepsilon^2 + \theta^2 - 2\,\varepsilon\theta\cos(\alpha + \pi/2);$$
$$\rho \approx \varepsilon\sqrt{1 - 2\theta\cos(\alpha + \pi/2)/\varepsilon} \approx \varepsilon + \theta\cos(\pi/2 - \alpha).$$

Во втором выражении мы использовали тот факт, что θ<<ε. Получается, что в более сложной модели минимальное расстояние между Полярной звездой и северным полюсом мира составит

$$\rho - \varepsilon = \theta\sin\alpha = 27.15'.$$

Интересно, что такой же ответ мы получаем в простой модели из анализа прямоугольного треугольника $\mathbf{P_0P_1S}$. Чтобы определить длину пути северного полюса мира до ближайшей к Полярной звезде точки, в более сложной модели нужно воспользоваться теоремой синусов, считая дугу s_0 отрезком прямой линии:

$$s_0 = \varepsilon \sin\gamma = \varepsilon \sin(\pi/2+\alpha)\frac{\theta}{\rho} = \theta\cos\alpha \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \theta\sin\alpha}.$$

В простой модели последний множитель обращается в единицу, и из того же прямоугольного треугольника мы получим $s_1=\theta\cos\alpha$. Значения s_0 и s_1 получаются равными 34.2′ и 34.8′ соответственно, здесь разница двух моделей уже заметна. Дальнейшие вычисления мы можем также производить в плоском приближении, считая траекторию полюса мира окружностью с радиусом ε, и тогда, зная дугу, пройденную по кругу прецессии

$$\gamma_{0,1} = \frac{s_{0,1}}{\varepsilon},$$

мы определяем время, которое потребуется для такого смещения:

$$t_{01,11} = T\frac{\gamma_{0,1}}{2\pi} = \frac{T\cdot s_{0,1}}{2\pi\varepsilon}.$$

Здесь T – период прецессии. Можно рассуждать несколько по-иному, определив проекцию отрезка s на малом круге небесной сферы радиусом ε на большой круг – эклиптику:

$$S_{0,1} = s_{0,1} / \sin\varepsilon.$$

Прецессия земной оси (движение точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики) происходит с угловой скоростью $\Omega=2\pi/T$, что соответствует известной величине 50.3″ в год. Отсюда мы определяем время, за которое точка весеннего равноденствия пройдет дугу S:

$$t_{00,10} = \frac{S_{0,1}}{\Omega} = T\frac{\gamma_{0,1}}{2\pi} = \frac{T\cdot s_{0,1}}{2\pi\sin\varepsilon}.$$

От предыдущей модели эти выражения отличаются тем, что вместо угла ε в радианной мере в знаменателе фигурирует его синус. Итак, мы имеем четыре модельных значения искомого времени:

Радиус круга движения полюса мира	Учет кривизны пути полюса мира	Без учета кривизны полюса мира
sin ε	t_{00} = 102.8 лет, 2102 год	t_{10} = 104.6 лет, 2104 год
ε	t_{01} = 99.9 лет, 2099 год	t_{11} = 101.7 лет, 2101 год

Реальный момент максимального сближения на 27′ приходится на 2102 год. Интересно, что наиболее простой метод вычислений (значение t_{11}) вследствие компенсации двух погрешностей дает ответ, близкий к наиболее точному (t_{00}).

10.5. Система оценивания. Как видно из приведенного выше решения, его можно производить с разной степенью точности, причем самый простой из предложенных способов, благодаря частичной компенсации двух погрешностей, дает хороший ответ, приближенный к точному. Решение задания четко разбивается на два основных этапа.

1 этап – 3 балла: определение минимального углового расстояния между Полярной звездой и северным полюсом мира, точность 1′. Как видно из предложенного решения, простая модель с прямолинейным движением полюса с высокой точностью дает тот же ответ, что и более сложная модель. Этап оценивается полностью в случае правильных вычислений, вне зависимости от модели. В случае арифметической ошибки при правильных формулах выставляется 2 балла (погрешность до 2′) или 1 балл (погрешность более 2′).

2 этап – 5 баллов: определение времени максимального сближения полюса и звезды на небе. Оценка определяется точностью используемой модели. В случае использования наиболее простой модели с прямолинейным движением полюса на плоском небе (оценка времени t_{11}) максимальная оценка за этап при отсутствии ошибок составляет 3 балла. Еще 1 балл выставляется за учет кривизны линии движения полюса, также 1 балл добавляется за учет фактора sin ε (вместо самого угла ε) при расчете длины дуги, описываемой полюсом.

При решении участники могут предположить, что полюс мира движется в противоположную сторону (в направлении с прямым восхождением 12ч), что при дальнейших верных рассуждениях приведет его к выводу, что полюс прошел на минимальном угловом расстоянии от Полярной звезды около 100 лет назад и пройдет вновь через 25676 лет. В таких решениях может быть засчитан первый этап (если угловое расстояние определено верно), а за второй выставляется не более 1 балла. При иных неверных направлениях движения полюса эклиптики общая оценка за все решение не может превышать 1 балла.

10.6. Условие. В конце октября 2007 года в ядре кометы Холмса (17P) произошел изотропный взрыв, в результате которого угловой диаметр комы через неделю достиг 13′. На графике представлены результаты измерений звездной величины кометы в эпоху взрыва. Определите концентрацию осколков кометы (в км$^{-3}$) через неделю после взрыва. Считайте, что до взрыва комета представляла собой монолитное ядро без хвоста с постоянной плотностью и химическим составом. Расстояние кометы от Земли в это время считать постоянным и равным 1.6 а.е.

10.6. Решение и система оценивания. См. 9 класс, задача 9.6.