Возможные решения

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Навигация *(Е. А. Подоляко)*

1. В момент встречи катеров корабль вновь оказался на расстоянии L от пристани. Проведем окружность радиусом AB с центром в точке B (окружность 1). Через время 2τ корабль должен находиться где-то на этой окружности.
2. Учет соотношения скоростей корабля и катеров дает, что расстояния, пройденные за время τ кораблем и вместе двумя катерами, относятся как 4 к 3.
3. Так как времена движения корабля до начала движения катеров и после равны, линия, вдоль которой двигались катера, является высотой в равнобедренном треугольнике с вершинами в точках начального положения корабля A, пристани B и конечного положения корабля. Следовательно, треугольник с вершинами в точках начального положения корабля A, пристани B и в месте отправления катера от корабля — прямоугольный.
4. Применяя теорему Пифагора, получим, что катера до встречи прошли расстояние 3 км, а корабль за это время — 4 км.
5. Найдем место старта катера, отправившегося от корабля, построив окружности радиусом 3 км с центром в точке B (окружность 2) и радиусом 4 км с центром в точке A (окружность 3) до их пересечения (точка C) (рис. 16).

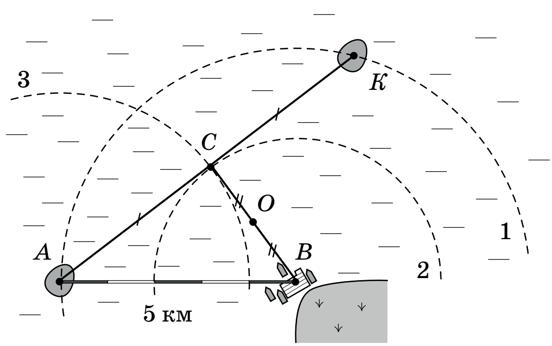

Рис. 16

6. Продлив прямую AC до пересечения с окружностью 1, получим искомое положение корабля (точка K) в момент встречи катеров.

7. Так как катера встретились на середине отрезка CB (точка O), то каждый из них прошел расстояние 1,5 км.

Задача 2. Безопасная дистанция *(М. Ю. Замятнин)*

Если машины не встречаются до полной остановки, то безопасное расстояние между ними складывается из разности тормозных путей до полной остановки и длины участка, на котором задний автомобиль движется с постоянной скоростью. Такой сценарий однозначно реализуется, если сзади едет машина, тормозящая с меньшим ускорением a_1 (см. график зависимости мгновенной скорости u машин от времени t (рис. 17)). Безопасная дистанция, при этом принимает большее значение (L_2).

$$L_2 = v\tau + \frac{v^2}{2a_2} - \frac{v^2}{2a_1} \quad \text{или} \quad L_2 = v\tau + \frac{v^2}{2}\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2}$$

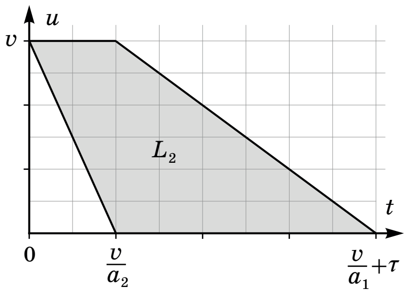

Рис. 17

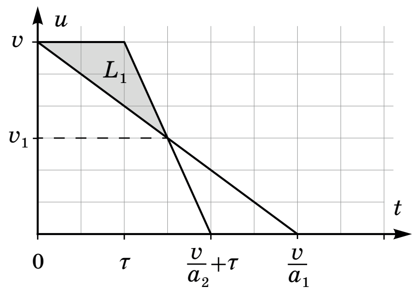

Рис. 18

Возможна ситуация, при которой задняя машина, начинающая торможение позже, но движущаяся затем с большим ускорением, догоняет переднюю, когда та еще не остановилась (рис. 18).

Для реализации этого случая, необходимо выполнение условия:

$$\tau + \frac{v}{a_2} < \frac{v}{a_1}, \qquad \text{или} \qquad v > \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}\tau \tag{1}$$

Тогда безопасная дистанция рассчитывается по формуле $L_1 = \frac{1}{2}\tau(v - v_1)$, и с учетом соотношений: $v - v_1 = a_1 t$ и $v - v_1 = a_2(t - \tau)$

$$L_1 = \frac{1}{2}\tau^2 \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}, \quad \text{откуда} \quad L_2 = v\tau + \frac{v^2}{4}\frac{\tau^2}{L_1}.$$

Решая квадратное уравнение $v^2\tau^2 + 4L_1 v\tau - 4L_1 L_2 = 0$ относительно v, получим:

$$v = \frac{2L_1}{\tau}\left(\sqrt{1 + \frac{L_2}{L_1}} - 1\right) = 20 \text{ м/с}. \tag{2}$$

В предположении встречи после остановки первой машины получается ответ: $v = \frac{L_1+L_2}{2\tau} = 22{,}5$ м/с, что принципиально неверно для заданных в условии расстояний.

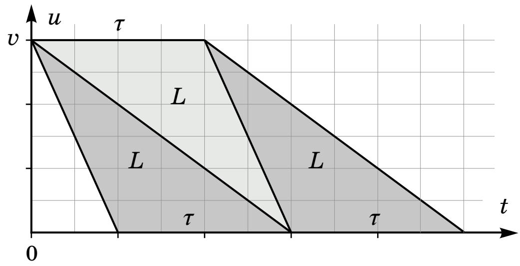

Рис. 19

Отметим, что так как $\frac{a_1a_2}{a_2-a_1} = \frac{2L_1}{\tau^2}$, условие (1) может быть записано так $v > 2L_1/\tau$. Сравнение этого неравенства с формулой (2) дает простое выражение для условия реализации встречи машин до остановки ($L_2/L_1 > 3$). На (рис. 19) представлена графическая интерпретация этого неравенства.

Задача 3. Стремянка *(М. Ю. Замятнин)*

Рассмотрим внешние силы, действующие на всю лестницу (рис. 20). Из правила моментов относительно правой нижней точки, с учетом соотношения $\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$, получим $3N_1 = mg$. Откуда $N_1 = \frac{1}{3}mg$, а $N_2 = \frac{2}{3}mg$.

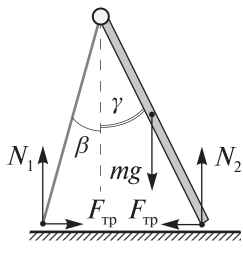

Рис. 20

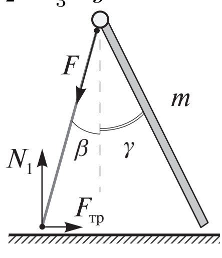

Рис. 21

Сила, действующая на опору со стороны шарнира может быть направлена только вдоль нее (рис. 21). В противном случае возникнет некомпенсированный момент относительно нижней точки опоры. Таким образом

$$F = \frac{N_1}{\cos\beta} = \frac{1}{3}\frac{mg}{\cos\beta} = 71 \text{ Н}.$$

Из равенства нулю суммы горизонтальных сил следует, что силы трения равны. Но, первой проскользнет легкая опора, так как на нее действует меньшая сила нормальной реакции. Минимальное значение коэффициента трения:

$$\mu = \operatorname{tg}\beta = 0{,}36.$$

Задача 4. Четырёхцилиндровый нагрев *(А. Н. Аполонский)*

Пусть M — масса цилиндра. В случае, если после погружения цилиндра в калориметр жидкость не вытекает, уравнение теплового баланса выглядит так: $cM(T-t) = c_0 m_0 t$, где t — установившаяся в калориметре температура, отсюда:

$$t = \frac{cMT}{cM + c_0 m_0} \quad \text{и} \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{T} + \frac{c_0}{c}\frac{m_0}{T}\frac{1}{M} \tag{3}$$

Зависимость $y = \frac{1}{t}$ от $x = \frac{1}{M}$ будет линейной с угловым коэффициентом $k_1 = \frac{c_0 m_0}{cT}$ и свободным членом $b_1 = \frac{1}{T}$.

Рассмотрим случай, когда при погружении часть жидкости вытекает, то есть объем цилиндра больше объёма части калориметра, незанятого жидкостью ΔV. Тогда уравнение теплового баланса имеет вид:

$$cM(T-t) = c_0\left(m_0 - \frac{M}{\rho}\rho_0 + \rho_0\Delta V\right)t,$$

$$t = \frac{cMT}{cM + c_0 m_0 + c_0\rho_0\Delta V - \frac{M}{\rho}\rho_0 c_0}$$

Для обратных величин:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{c_0\rho_0}{c\rho}\right) + \frac{c_0}{c}\frac{m_0 + \Delta m}{T}\frac{1}{M}, \tag{4}$$

здесь $\Delta m = \rho_0\Delta V$.

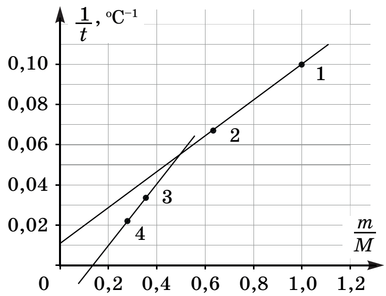

Рис. 22

Нанесем на координатную плоскость (y, x), где $y = \frac{1}{t}$, $x = \frac{m}{M}$ данные условия задачи. Соответствующий масштаб выбран для удобства (рис. 22). Видно, что точки, соответствующие данным в условии, принадлежат двум разным зависимостям, т. 1 и т. 2 зависимости (3) (объём цилиндра меньше объёма ΔV), т. 3 и т. 4 зависимости (4) (объём цилиндра больше объёма ΔV).

Применяя дважды уравнение (3) для первого и второго цилиндра, получим, что их начальная температура $T = 90°$C.

Из сравнения угловых коэффициентов наклона зависимостей

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{m_0 + \Delta m}{m_0} = \frac{3}{2},$$

следует, что доля объема стакана, заполненная жидкостью $\gamma = \frac{2}{3}$.

Пересечение графиков при $m/M = 0{,}5$ соответствует моменту начала вытекания жидкости. При этом масса цилиндра равна $2m = 6\rho_0 V/3$. Но масса жидкости $m_0 = \rho_0 2V/3$, следовательно, $m = \frac{3}{2}m_0 = 300$ г. Подставив, значения T и m в уравнение (3) для первого цилиндра, получим: $c_0/c = 12$.

Задача 5. Треугольная призма *(В. П. Слободянин)*

1) При подключении к узлам A и A_1 эквивалентная схема имеет вид (рис. 23)

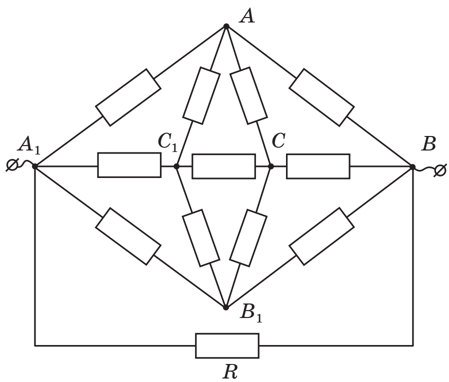

Рис. 23

Разорвав узлы A и B_1, получим схему (рис. 24), которая сводится к системе элементарных параллельных и последовательных соединений резисторов.

$$\frac{1}{R_{AB_1}} = \frac{1}{R} + \frac{2}{2R} + \frac{1}{2R + \frac{R}{2}}$$

Откуда $R_{AA_1} = \frac{5}{12}R = 5$ Ом.

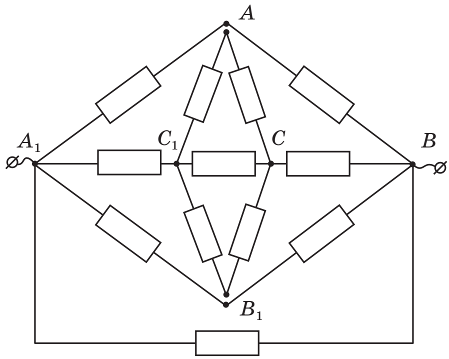

Рис. 24

2) При подключении к узлам C и A_1 эквивалентная схема представляет собой сбалансированный мост (рис. 25). Токи через резисторы, подсоединенные между узлами A, B, C_1, B_1 не идут, и $R_{CA_1} = \frac{1}{2}R = 6$ Ом.

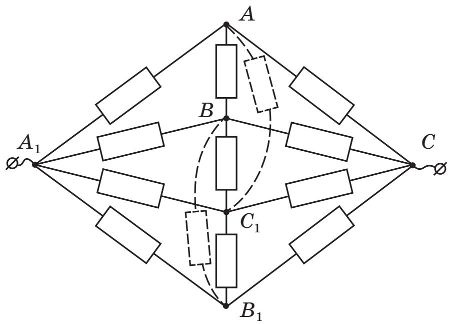

Рис. 25