

## Задание 1

В доме девять этажей, но лифт сломался, и теперь в нём работают только две кнопки. Нажатие на первую кнопку приводит к тому, что лифт поднимается на пять этажей вверх, а при нажатии на вторую кнопку лифт спускается на три этажа вниз. Подниматься выше девятого этажа или спускаться ниже первого этажа нельзя, ходить по лестнице тоже нельзя. Как подняться с первого этажа на девятый?

### Решение

Нужно подняться на 8 этажей, если выполнили  $x$  операций «подняться на 5», и  $y$  операций «спуститься на 3», то  $5x-3y=8$ . Решение можно найти подбором, например, такое:  $y = 4$ ,  $x = 4$ . Можно также заметить, что выполнение операции «подняться на 5» и операции «спуститься на 3» приводит к подъёму на 2 этажа, поэтому эти операции нужно выполнить по 4 раза.

Для полного решения необходимо ещё привести пример последовательности операций. Пример.

Операция	Этаж
	1
Подняться на 5	6
Спуститься на 3	3
Подняться на 5	8
Спуститься на 3	5
Спуститься на 3	2
Подняться на 5	7
Спуститься на 3	4
Подняться на 5	9

### Критерии оценивания

Правильно приведенная последовательность действий – 5 баллов.

Последовательность действий, в которой общее число операций «Подняться на 5» и «Спуститься на 3» найдено верно, но в результате неправильного порядка происходит однократный выход выше 9 этажа или ниже 1 этажа – 3 балла.

Последовательность действий, в которой общее число операций «Подняться на 5» и «Спуститься на 3» найдено верно, но число выходов выше 9 этажа или ниже 1 этажа больше одного – 2 балла.

Правильно указано число операций «Подняться на 5» и «Спуститься на 3» – 2 балла.

## Задание 2

В игре «Камень, ножницы, бумага» двое игроков одновременно показывают при помощи

руки один из трёх условных символов – «камень», «ножницы» или «бумага». Игрок выигрывает, если он показал камень, а его противник – ножницы («камень тупит ножницы»), если он показал ножницы, а его противник – бумагу («ножницы режут бумагу»), если он показал бумагу, а его противник – камень («бумага накрывает камень»). Если два игрока показали одинаковые символы, то игра заканчивается вничью.

Алёша и Боря сыграли в эту игру девять раз. Алёша два раза показал камень, три раза – ножницы, четыре раза – бумагу. Боря три раза показал камень, четыре раза – ножницы, два раза – бумагу, но порядок, в котором они показывали эти символы, неизвестен. Также известно, что игра ни разу не закончилась вничью. Определите, какое наибольшее число раз мог выиграть Алёша. А какое наибольшее число раз мог выиграть Боря? Объясните свой ответ.

## Решение

Составим таблицу, сколько раз каждый из мальчиков показывал каждый символ:

	Алёша	Боря
Камень	2	3
Ножницы	3	4
Бумага	4	2

Боря мог выиграть все 9 раз, если 3 раза Боря показал камень, Алёша – ножницы, 4 раза Боря показал ножницы, Алёша – бумагу, 2 раза Боря показал бумагу, Алёша – камень.

Посчитаем, сколько раз Алёша мог выиграть у Бори. Такое могло произойти в следующих случаях:

- 1) Алёша показывает камень, Боря – ножницы. Это могло произойти не более 2 раз.
- 2) Алёша показывает ножницы, Боря – бумагу. Это могло произойти не более 2 раз.
- 3) Алёша показывает бумагу, Боря – камень. Это могло произойти не более 7 раз.

Таким образом, Алёша мог выиграть не более 7 раз, но этот вариант недостижим, так как в этом случае в 7 партиях выигрывает Алёша:

- 1) Алёша показывает камень, Боря показывает ножницы – 2 раза.
- 2) Алёша показывает ножницы, Боря показывает бумагу – 2 раза.
- 3) Алёша показывает бумагу, Боря показывает камень – 3 раза.

Оставшиеся две партии должны быть такими:

- 4) Алёша показывает бумагу, Боря показывает ножницы – 1 раз.
- 5) Алёша показывает ножницы, Боря показывает ножницы – 1 раз.

В этом случае один раз игра заканчивается вничью, что недопустимо по условию задачи, то есть Алёша не мог выиграть 7 партий.

Приведём пример, когда Алёша выиграл 6 партий.

- 1) Алёша показывает камень, Боря показывает ножницы – 2 раза.
- 2) Алёша показывает ножницы, Боря показывает бумагу – 2 раза.
- 3) Алёша показывает бумагу, Боря показывает камень – 2 раза.
- 4) Алёша показывает ножницы, Боря показывает камень – 1 раз.
- 5) Алёша показывает бумагу, Боря показывает ножницы – 2 раза.

Алёша выигрывает в случаях 1-3, то есть 6 раз.

### **Критерии оценивания**

Оценка складывается из двух оценок – ответ на вопрос о том, сколько раз мог выиграть Алёша (максимум 3 балла) и сколько раз мог выиграть Боря (максимум 2 балла).

Правильно указано, что Алёша мог выиграть 6 раз, показано, что Алёша не мог выиграть более 6 раз, приведён пример, когда Алёша выигрывает 6 раз – 3 балла.

Отсутствует объяснение, почему Алёша не может выиграть более 6 раз, или отсутствует пример, когда Алёша выигрывает 6 раз – 2 балла.

Дан только ответ, что Алёша может выиграть не более 6 раз – 1 балл.

Указано, что Алёша может выиграть 7 раз, приведён пример для 7 выигрышей Алёши, при этом одна партия заканчивается вничью (как в задании для 5 класса) – 1 балл.

Правильно указано, что Боря может выиграть 9 раз, приведён пример – 2 балла.

Только ответ, что Боря может выиграть 9 раз без примера – 1 балл.

### **Задание 3**

Три вора – Камнев, Ножницын и Бумагин хотят переправиться через реку. У каждого вора два больших баула. В лодке три места, одно место занимает один человек или один баул. Грести умеет только Камнев. При этом если Камнев останется в лодке или на берегу с баулом Ножницына и Ножницына не будет рядом, то Камнев обчистит баул Ножницына. Аналогично Ножницын обчистит баул Бумагина в его отсутствие, а Бумагин обчистит баул Камнева в его отсутствие. Как им переправиться на другой берег? Опишите алгоритм их действий.

### **Решение**

Возможный алгоритм действий.

- 1) Камнев перевозит два своих баула и возвращается назад.
- 2) Камнев перевозит Ножницына с баулом Ножницына, возвращается с Ножницыном.
- 3) Камнев перевозит Ножницына с баулом Ножницына, возвращается один назад.
- 4) Камнев перевозит Бумагина с баулом Бумагина, оставляет их на другом берегу, возвращается назад с двумя своими баулами.
- 5) Камнев перевозит баул Бумагина и возвращается назад.
- 6) Камнев перевозит два своих баула.

### **Критерии оценивания**

Приведён верный алгоритм – 5 баллов.

Алгоритм с одной ошибкой (например, однажды возникает ситуация, когда один вор может обчистить баул другого вора, или один баул остаётся непереверённым) – 2 балла.

Алгоритм с двумя ошибками – 1 балл.

### **Задание 4**

Есть чашечные весы без делений. Для взвешивания груза также можно использовать гирьки, массы которых – целое число граммов. Вам необходимо предложить набор гирек, при помощи которого можно отмерить на весах любую массу, равную целому числу граммов от 1 до 20, при этом число гирек в наборе должно быть как можно меньше. Гирьки можно класть на каждую чашку весов, чашки весов должны находиться в равновесии, при этом на

одной из чашек весов должен находиться взвешиваемый груз. Массы гирек в наборе могут повторяться. Объясните, как любую массу от 1 до 20 граммов можно взвесить при помощи предложенного набора.

### **Решение**

В оптимальном наборе гирек для уравнивания любых масс необходимо использовать гирьки, массы которых являются степенями тройки: 1, 3, 9, 27 и т. д. Это связано с тем, что любое число можно представить в уравновешенной троичной системе счисления, при этом цифра 1 будет соответствовать тому, что гирька данной массы кладётся на одну чашку весов, цифра  $-1$  будет соответствовать гирьке на другой чашке весов, а 0 означает, что данная гирька не используется.

Приведём пример уравнивания всех масс от 1 до 20 при помощи гирек массами 1, 3, 9, 27.

$$1 = 1.$$

$$2 = 3 - 1,$$

$$3 = 3,$$

$$4 = 3 + 1,$$

$$5 = 9 - 3 - 1,$$

$$6 = 9 - 3,$$

$$7 = 9 - 3 + 1,$$

$$8 = 9 - 1,$$

$$9 = 9,$$

$$10 = 9 + 1,$$

$$11 = 9 + 3 - 1,$$

$$12 = 9 + 3,$$

$$13 = 9 + 3 + 1,$$

$$14 = 27 - 9 - 3 - 1,$$

$$15 = 27 - 9 - 3,$$

$$16 = 27 - 9 - 3 + 1,$$

$$17 = 27 - 9 - 1,$$

$$18 = 27 - 9,$$

$$19 = 27 - 9 + 1,$$

$$20 = 27 - 9 + 3 - 1.$$

От учащегося требуется привести пример конструкции из четырёх гирек (их массы могут отличаться от примера 1, 3, 9, 27) и показать, что любую массу можно уравновесить при помощи данного набора гирек.

### **Критерии оценивания**

Приведён пример набора из четырёх гирек, объяснено, как уравновесить каждую массу от 1 до 20 при помощи данного набора гирек – 5 баллов.

Только приведён пример правильного набора, без обоснования – 3 балла.

Приведён пример набора из четырёх гирек, при этом одна какая-то масса от 1 до 20 не может быть уравновешена при помощи этого набора – 1 балл.

Приведён пример набора из пяти гирек (например, 1, 2, 4, 8, 16), показано, как уравновесить каждую массу от 1 до 20 при помощи данного набора – 3 балла.

Только приведён пример набора из пяти гирек, удовлетворяющий условию задачи, без обоснования, почему каждую массу от 1 до 20 можно уравновесить при помощи гирек из данного набора – 1 балл.

## **Задание 5**

Вам нужно умножить некоторое большое число  $X$  на 27. У вас есть калькулятор, но на калькуляторе сломались все кнопки операций, кроме сложения. Поэтому вы можете только складывать разные числа (например, можно сложить число  $X$  и число  $X$ , тогда получится  $2X$ , затем можно сложить число  $2X$  и  $2X$  и получится  $4X$ , а можно сложить  $2X$  и  $X$  и получится  $3X$ , то есть можно складывать любые ранее полученные числа между собой). Определите, при помощи какого минимального числа сложений можно получить число  $27X$ . Приведите последовательность операций, при помощи которых можно получить число  $27X$  за указанное число сложений.

### **Решение**

Задачу можно решить за шесть операций. Например:

- 1)  $2X = X + X$ .
- 2)  $3X = 2X + X$ .
- 3)  $6X = 3X + 3X$ .
- 4)  $9X = 6X + 3X$ .
- 5)  $18X = 9X + 9X$ .
- 6)  $27X = 18X + 9X$ .

### **Критерии оценивания**

Верный алгоритм с использованием 6 операций – 5 баллов.

Верный алгоритм с использованием 7 операций – 3 балла.

Верный алгоритм с использованием 8 операций – 1 балл.

Неверный алгоритм или число операций больше 8 – 0 баллов.