

11 класс**Второй день**

- 11.6. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \dots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d . Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

- 11.7. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно чётная?

- 11.8. Докажите, что найдётся такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n , взаимно проста с n .
- 11.9. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.
- 11.10. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A , а на сфере ω_2 — фиксированная точка B . На сфере ω_1 выбирается переменная точка X , а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XU лежат на одной сфере.

11 класс**Второй день**

- 11.6. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \dots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d . Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

- 11.7. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно чётная?

- 11.8. Докажите, что найдётся такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n , взаимно проста с n .
- 11.9. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.
- 11.10. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A , а на сфере ω_2 — фиксированная точка B . На сфере ω_1 выбирается переменная точка X , а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XU лежат на одной сфере.