РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

9.1. (Замятнин М.) Направление ветра можно оценить с помощью касательной, проведенной к начальному участку графика. Ветер дует от железной дороги в северо-восточном направлении, примерно под углом 30° к меридиану. Из закона сложения скоростей нетрудно заметить, что при движении паровоза с севера на юг, угол между шлейфом и железной дорогой по мере разгона должен уменьшаться, но он увеличивается, следовательно, паровоз движется с юга на север.

Так как движение паровоза равноускоренное из состояния покоя, то зависимость модуля его скорости от времени имеет вид: $u(t) = at$. Введем систему координат, направив ось OX перпендикулярно, а ось OY вдоль железной дороги, выбрав ноль в начальной точке шлейфа.В системе отсчета (СО) ветра проекции скорости паровоза на оси OX и OY равны:

$$w_{\text{y}} = u(t) + v_0 \cos\alpha$$
$$w_{\text{x}} = v_0 \sin\alpha$$

Координаты паровоза от времени (в СО ветра) изменяются следующим образом:

$$y(t) = v_0 \cos\alpha t + \frac{at^2}{2} \text{ (площадь под графиком } w_{\text{y}}(t))$$

$$x(t) = v_0 t \sin\alpha$$

Так как форма шлейфа не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой, уравнение траектории паровоза в СО ветра совпадает с уравнением траектории дыма и имеет вид:

$$y = \frac{ax^2}{2v_0^2 \sin^2\alpha} + x\mathrm{ctg}\alpha$$

Это уравнение параболы, координаты вершины которой x_0 и y_0 равны:

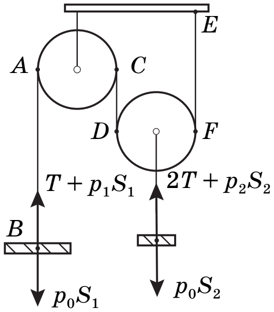
$$x_0 = \frac{v_0^2}{a}\sin\alpha\cos\alpha \text{ и } y_0 = \frac{v_0^2}{2a}\cos^2\alpha$$

Из рисунка находим $y_0 = 750$ м и $x_0 = 870$ м, тогда $y_0 = \dfrac{x_0 \mathrm{ctg}\alpha}{2}$, из чего убеждаемся, что $\mathrm{ctg}\alpha = 1{,}72$ ($\alpha = 30°$).

Зная угол, можно найти скорость ветра: $v_0 = \dfrac{\sqrt{2ay_0}}{\cos\alpha} = 10$ м/с. Заметим, что расстояние между крайними (по оси x) точками параболы равно $\Delta x = 2000$ м. Но, $\Delta x = v_0\tau\sin\alpha$, где τ – время всего движения паровоза. Откуда $\tau = \Delta x/v_0\sin\alpha = 400$ с и расстояние, пройденное паровозом $s = a\tau^2/2 = 4000$ м. В принципе, это расстояние можно найти, определив положение начальной точки движения паровоза, продлив касательную, проведенную к началу шлейфа до пересечения с железной дорогой. Минимальная скорость ветра относительно паровоза равна $v_{min} = v_0\sin\alpha = 5$ м/с.

9.2. (Аполонский А.) Объем жидкости не изменяется, следовательно поршни могут перемещаться только в противоположных направлениях. Поршень S_2 смещается вверх, а S_1 – вниз. Пусть при перемещении рычага вверх на h, правый поршень поднялся на x, а левый опустился на y. Тогда из-за несжимаемости жидкости $y = xS_2/S_1$. Рассмотрим изменение длин вертикальных участков нити AB, CD и EF. Длина AB увеличивается на $\Delta l_1 = h + y$, длина участков CD и EF уменьшается на $\Delta l_2 = x - h$. Длина нити не меняется, поэтому $\Delta l_1 = 2\Delta l_2$. Следовательно $h + y = 2x - 2h$. Откуда:

$$x = \frac{3hS_1}{(2S_1 - S_2)}, \text{ а } y = \frac{3hS_2}{(2S_1 - S_2)}.$$



На поршни действуют силы натяжения (на левый действует сила T, а на правый $2T$), сила давления атмосферы и сила давления, действующая со стороны жидкости. Пусть p_1 давление в жидкости под поршнем в левом цилиндре.Давление под правым поршнем будет равно:

$$p_2 = p_1 - \rho g(x + y) = p_1 - \rho gx(1 + S_2/S_1).$$

Условие равновесия для левого поршня: $T + p_1S_1 = p_0S_1$. Для правого: $2T + p_2S_2 = p_0S_2$. Откуда:

$$p_1 = p_0 - \rho gx\frac{S_2(S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)S_1}$$

$$T = (p_0 - p_1)S_1 = \rho gx\frac{S_2(S_1 + S_2)}{(2S_1 - S_2)S_1}$$

Сила F, приложенная к рычагу равна: $F = 3T = 9\rho gh\dfrac{S_1 + S_2}{(2S_1 - S_2)^2}$.

При $S_2 = 2S_1$ на правый поршень действуют силы давления и натяжения вдвое большие, чем на левый, поэтому поршни не могут двигаться в противоположных направлениях. Следовательно смещение поршней возможно лишь при их отрыве от поверхности жидкости. При перемещении рычага силы не изменяются и равны: $T = p_0S_1$, $F = 3T = 3p_0S_1$.

9.3. (Замятнин М.) Пластилин, падая свободно с высоты h_i за время $\tau_i = \sqrt{\dfrac{2h_i}{g}}$ приобретает скорость $u_i = \sqrt{2gh_i}$.

Так как брусок до удара движется равномерно, внешняя сила тяги равна $F = \mu mg$. В момент слипания тел на систему действуют две внешние ударные силы: трения, нормальной реакции опоры и две внешние постоянные силы: тяжести и тяги. За бесконечно малое время удара роль постоянных сил в изменении импульса системы пренебрежима. Запишем изменение импульса системы с учетом ударных сил (теорему о движении центра масс системы в импульсной форме). На горизонтальную ось: $\Delta p_x = -\mu N\Delta t$; на вертикальную: $\Delta p_y = N\Delta t$. Учитывая, что скольжение бруска не прекращается за время слипания: $\Delta p_x = -\mu\Delta p_y$, или $2mv_k - mv_0 = -\mu mu$, откуда скорость системы сразу после слипания $v_k = (v_0 - \mu u)/2$.

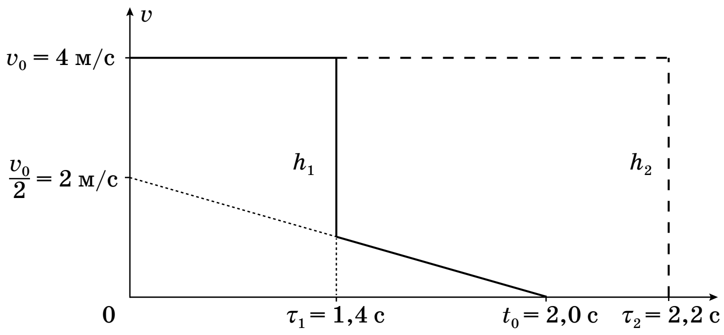
Из второго закона Ньютона, записанного для системы после слипания: $2ma = F - 2\mu mg$, следует, что под действием внешней силы тяги система будет двигаться равнозамедленно с ускорением $a = \mu g/2$. Окончательно зависимость скорости системы от времени приобретает вид $v = v_k - a(t - \tau) = (v_0 - \mu u - \mu g\,(t - \tau))/2 = (v_0 - \mu gt)/2$. Скорость не зависит от начальной высоты падения пластилина! Полученная зависимость верна для времен $t > \tau$. Поэтому при падении с высот больших, чем $h_1 = 5$ метров скорость бруска через 1 с не изменится и будет равна 4 м/с, но при падении с меньших высот она окажется равной $v = (v_0 - \mu gt_1)/2 = 1$ м/с.

Для любых высот падения пластилина скорость бруска обращается в ноль при $t_0 = v_0/\mu g = 2$ с.

Следует заметить, что ответ на скорость системы угадывается. Если в силу существования решения задачи предположить, что от высоты падения пластилина конечная скорость системы не зависит, то для определенности начальную высоту можно взять нулевой. Тогда сразу пишется ответ $v = (v_0 - \mu gt)/2$. Но такое решение нельзя засчитывать, как правильное, так как оно получено для вырожденного случая и гарантированно не обобщается.

Приведенное выше решение получено в предположении, что брусок не останавливается (его не заклинивает) в момент удара. Для указанных численных данных заклинивание возможно при падении пластилина с высот более $h = v_0^2/(2\mu^2 g) = 20$ м.

График зависимости скорости бруска от времени получается путем сшивки постоянной скорости бруска до соударения с выведенной выше зависимостью со скачком во время удара.



9.4. (Зикрацкий Г.) Запишем уравнение теплового баланса для времени τ_1:

$$N\tau_1 = (m + \mu\tau_1)c(t_1 - t_0)$$

$$\tau_1 = \frac{mc(t_1 - t_0)}{N - \mu c(t_1 - t_0)} = 36 \text{ с}$$

Максимальная температура $t_{\max}$ достигается при обращении в ноль знаменателя и равна:

$$t_{\max} = \frac{N}{\mu c} + t_0 = 44\ ^\circ\text{C}.$$

Рассмотрим небольшой интервал времени $\Delta\tau$ через время τ после начала нагрева за который в систему поступает $\mu\Delta\tau$ воды при комнатной температуре. Из уравнения теплового баланса:

$$N\Delta\tau = (m + \mu\tau)c\Delta t + \mu\Delta\tau c(t + \Delta t - t_0), \text{ откуда}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{Nm}{c(m + \mu\tau)^2}$$

Так как $\tau = \tau_1$ и с учетом размера шкалы, искомая скорость равна:

$$v = \frac{Nml}{(t_1 - t_0)c(m + \mu\tau)^2} = 0{,}32 \text{ мм/с}.$$

9.5. (Киреев А.) При подключении к нелинейному элементу Z показания омметра равны $R_z = U_z/I_z = 0{,}8$ кОм, что соответствует силе тока $I_z = 7{,}5$ мА и напряжению $U_z = 6$ В на нелинейном элементе (точка A на рисунке).

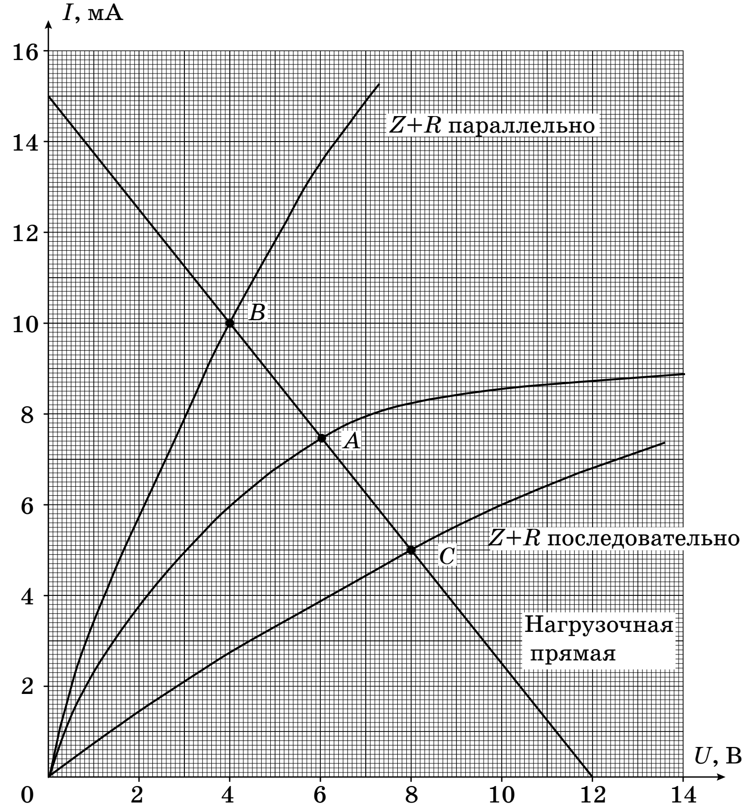
Вольтамперная характеристика участка цепи, содержащего соединённые параллельно нелинейный элемент Z и резистор R, имеет вид, представленный на рисунке (зависимость 1, её можно построить, учитывая, что при параллельном соединении двух элементов общим для них является напряжение, а сила тока через участок цепи равна сумме сил токов через каждый элемент). Показания омметра при этом $R_1 = U_1/I_1 = 0{,}4$ кОм, что соответствует силе тока $I_1 = 10$ мА и напряжению $U_1 = 4$ В на участке цепи (точка B на рисунке).

Так как омметр содержит источник постоянного напряжения и сопротивление, то для него можно построить нагрузочную прямую (см. рисунок), которая должна пройти через точки A и B и задается уравнением:

$$I = -\frac{U}{R} + \frac{U_0}{R}.$$

По точкам пересечения нагрузочной прямой с осями координат определяем напряжение источника $U_0 = 12$ В (при $I = 0$) и сопротивление $r = U_0/I = 0{,}8$ кОм (при $U = 0$).

Вольтамперная характеристика участка цепи, содержащего соединённые последовательно нелинейный элемент Z и резистор R, имеет вид, представленный на рисунке (зависимость 2 можно построить, учитывая, что при последовательном соединении двух элементов общей для них является сила тока, а напряжение на участке цепи равно сумме напряжений на каждом элементе). Показания омметра можно найти по координатам точки пересечения C нагрузочной прямой и кривой 2: $R_2 = U_2/I_2 = 1{,}6$ кОм.



I, мА
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
14
U, В
Z+R параллельно
B
A
C
Z+R последовательно
Нагрузочная прямая