

10 класс

Задача 1. Стакан-поплавок. В цилиндрическом сосуде площадь дна которого S_2 плавает тонкостенный цилиндрический стакан с площадью дна S_1 и высотой $h = 24$ см. Стакан начинают медленно погружать в воду, измеряя зависимость приложенной силы F от перемещения x стакана вниз относительно дна сосуда (рис. 1).

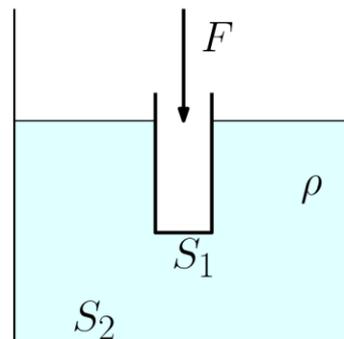


Рис. 1

Оказалось, что силе $F_1 = 1,0$ Н соответствуют два значения x :

$x_{1,1} = 1,5$ см и $x_{1,2} = 7,5$ см, а силе $F_2 = 2,0$ Н значения x :

$x_{2,1} = 3,0$ см и $x_{2,2} = 7,0$ см. Полагая, что плотность воды $\rho = 1,0$ г/см³, а ускорение

свободного падения $g = 10$ м/с², вычислите:

- массу стакана;
- площадь S_1 дна стакана;
- площадь S_2 дна сосуда.

Объемом стекла, из которого изготовлен стакан, можно пренебречь по сравнению с объемом воды, которой можно наполнить стакан.

Возможное решение. Пусть стакан сместился вниз относительно дна сосуда на расстояние x . При этом уровень воды в сосуде поднялся на $xS_1 / (S_2 - S_1)$, а глубина погружения стакана в воду увеличилась на $xS_2 / (S_2 - S_1)$. При этом сила Архимеда

увеличивается на

$$F = \rho g x \frac{S_1 S_2}{S_2 - S_1} \quad (1)$$

Связь между приложенной к стакану силой F (она в точности равна увеличению силы Архимеда) и его перемещением x является линейной (1) до момента, пока уровень воды не сравняется с верхним краем стакана. В этот момент величина силы F равна

$$F^* = (\rho S_1 h - m) g.$$

В отсутствие внешней силы F стакан выступал из воды на $h_1 = h - m / (\rho S_1)$, поэтому, для того, чтобы уровень воды сравнялся с верхним краем, его необходимо переместить вниз на

$$x^* = \left(h - \frac{m}{\rho S_1} \right) \frac{S_2 - S_1}{S_2}$$

Далее, при перемещении стакана вниз на Δx более, чем x^* (то есть всего на $x^* + \Delta x$) приложенная сила уменьшается на величину ΔF веса воды, втекающей в стакан. При этом $\Delta F = \rho S_2 \Delta x g$, а приложенная к стакану сила

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

$$F = F^* - \Delta F = (\rho S_1 h - m)g - \rho S_2 g \Delta x. \quad (2)$$

Таким образом, при $x > x^*$ сила линейно уменьшается до нуля при

$$x_{\max} = x^* + \Delta x_{\max} = h - \frac{m}{\rho S_1}.$$

Отметим, что максимальное смещение стакана до момента, когда он начинает “тонуть”, в точности равно расстоянию h_1 от верхнего края стакана до уровня воды в начальный момент.

На рисунке представлен график зависимости $F(x)$ согласно условию задачи. Легко видеть, что

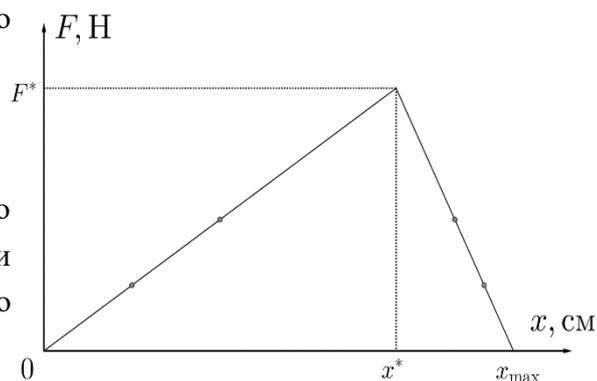


Рис. 2

$$x_{\max} = h_1 = h - \frac{m}{\rho S_1} = 8 \text{ см}; \quad (3)$$

$$x^* = h_1 \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right) = 6 \text{ см}; \quad (4)$$

$$F^* = \rho S_1 \left(h - \frac{m}{\rho S_1} \right) g = 4 \text{ Н}. \quad (5)$$

Из (3) следует $\frac{m}{\rho S_1} = 16 \text{ см}$; из (4) получим $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$. Подставляя $\frac{m}{\rho S_1}$ в (5) найдём

$$S_1 = 50 \text{ см}^2, \quad S_2 = 200 \text{ см}^2, \quad m = 0,8 \text{ кг}.$$

Критерии оценивания

- | | |
|---|----------------|
| 1) Связь величины подъёма уровня воды в сосуде с перемещением стакана | 1 балл |
| 2) Связь величины глубины погружения стакана с его перемещением | 1 балл |
| 3) Уравнение (1) | 1 балл |
| 4) Идея о втекании воды в стакан | 1 балл |
| 5) Уравнение (2) | 1 балл |
| 6) Нахождение F^* , x^* , x_{\max} | 3 балла |
| 7) Ответ | 2 балла |

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

Задача 2. Вязкий валик. Однородный цилиндр массы m и радиуса R касается двух параллельных длинных вертикальных пластин, движущихся с постоянными скоростями v_1 и v_2 вверх (рис. 1). Между пластинами и поверхностью цилиндра существует вязкое трение, сила его пропорциональна относительной скорости соприкасающихся поверхностей ($\vec{F}_{\text{тр}} = -\gamma \vec{v}_{\text{отн}}$). Коэффициенты вязкого трения для первой и второй пластин равны γ_1 и γ_2 соответственно.

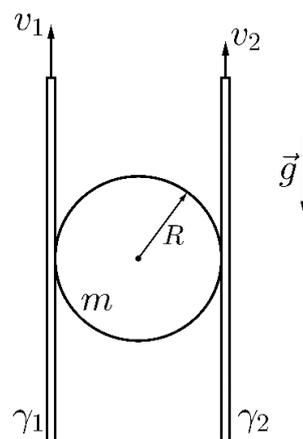


Рис. 1

1. Найдите установившуюся угловую скорость цилиндра, а также скорость его центра.

2. При каком условии цилиндр будет двигаться вверх?

Возможное решение (Семенов Н.).

Примем за положительное направление движения цилиндра – вниз, а за положительное направление вращения – по часовой стрелке. Тогда скорость точки A цилиндра, соприкасающейся с левой доской

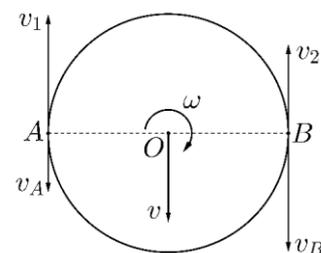


Рис. 2

$$v_A = v - \omega R.$$

Аналогично для точки B цилиндра, соприкасающейся с правой доской (рис. 2):

$$v_B = v + \omega R$$

При установившемся движении сумма сил, приложенных к цилиндру, равна нулю, а также равен нулю суммарный момент сил трения относительно оси O цилиндра (рис. 3):

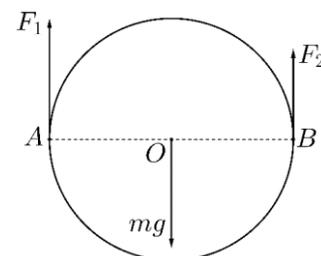


Рис. 3

$$mg = F_1 + F_2$$

$$F_1 R = F_2 R$$

Подставив

$$F_1 = \gamma_1(v_1 + v_A) = \gamma_1(v_1 + v - \omega R), \quad F_2 = \gamma_2(v_2 + v_B) = \gamma_2(v_2 + v + \omega R),$$

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} mg = \gamma_1(v_1 + v - \omega R) + \gamma_2(v_2 + v + \omega R) \\ \gamma_1(v_1 + v - \omega R) = \gamma_2(v_2 + v + \omega R), \end{cases}$$

решая которую, находим

$$\omega = \frac{mg}{4R} \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right) + \frac{v_1 - v_2}{2R},$$

$$v = \frac{mg}{4} \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) - \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Как видно из выражения для скорости, цилиндр движется вверх, если

$$v_1 + v_2 > \frac{mg}{2} \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right).$$

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

Критерии оценивания

Записаны выражения для скоростей точек A и B – по 1 баллу за точку	2 балла
Записано равенство сил, действующих на цилиндр + правило моментов по 1 баллу за точку	2 балла
Получена система, из которой определяется v и ω	2 балла
Проведены необходимые преобразования и найдены v и ω по 1,5 балла за каждую физическую величину	3 балла
Найдено условие движения цилиндра вверх	1 балл

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

Задача 3. Два шарика на двух нитях. Легкий цилиндрический сосуд с жидкостью стоит на двух симметричных опорах. Над одной из них внутри сосуда привязан к дну полностью погруженный в жидкость поплавок объемом $V=10\text{ см}^3$ и плотностью $\rho=500\text{ кг/м}^3$. Над другой опорой висит привязанный к верху сосуда шарик такого же объема V и плотностью 3ρ (рис. 1). Найдите модуль разности сил реакции опор.

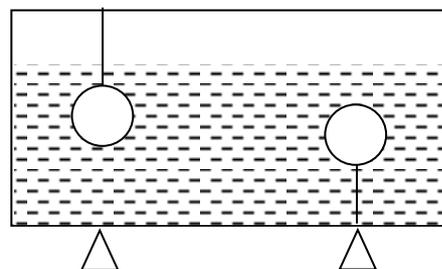


Рис. 1

Возможное решение (Заятник М.). Расставим силы, действующие на сосуд: F -сила давления на дно, действующая со стороны воды, T_1 и T_2 - силы натяжения нитей, N_1 и N_2 -силы реакций опор (рис. 2).

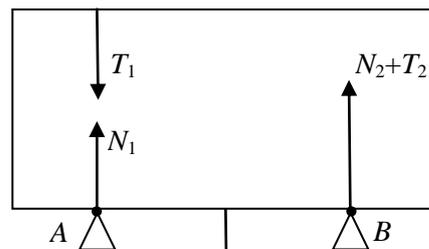


Рис. 2

Запишем правило моментов относительно точки A :

$$(N_2 + T_2)2l = Fl.$$

Запишем правило моментов относительно точки B :

$$N_1 2l = T_1 2l + Fl.$$

Найдём силу с которой вода действует на дно сосуда:

$$F = \rho_0 g HS = \rho_0 g \left(\frac{m}{\rho_0} + 2V \right),$$

где H - уровень воды в сосуде, S – площадь дна сосуда, m – масса воды в сосуде.

Запишем условие равновесия для шариков: $T_1 + \rho_0 Vg = 3\rho Vg$.

$$T_2 + \rho Vg = \rho_0 Vg.$$

$$N_1 = \frac{mg + 6\rho Vg}{2},$$

Решая систему получим:

$$N_2 = \frac{mg + 2\rho Vg}{2}.$$

$$N_1 - N_2 = 2\rho Vg = 0,1\text{ Н}.$$

Критерии оценивания

- | | |
|---|----------------|
| 1) Записано правило моментов относительно полюса (A) | 1 балл |
| 2) Записано правило моментов относительно полюса (B) | 1 балл |
| 3) Записано условие равновесия для шариков (для каждого по 1 баллу) | 2 балла |
| 4) Получено выражение для силы F | 2 балла |
| 5) Найдена реакция опоры N_1 | 1 балл |
| 6) Найдена реакция опоры N_2 | 1 балл |
| 7) Получен ответ | 2 балла |

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

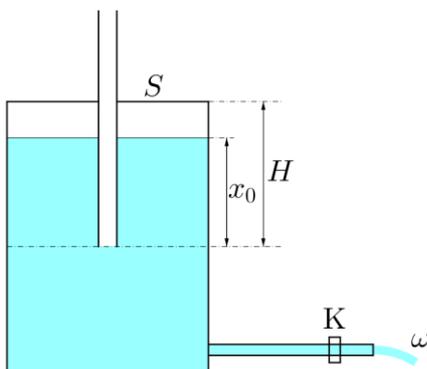


Рис. 1

Задача 4. Сосуд Мариотта Сосуд Мариотта представляет собой герметически закрытый цилиндрический сосуд с площадью дна S , в верхнюю крышку которого вставлена открытая с обоих концов тонкая трубка (рис. 1). Нижний конец трубки расположен на расстоянии H от верхней крышки сосуда. Около дна сосуда в его боковую стенку вставлена горизонтальная трубка с краном. В начальный момент времени высота уровня воды относительно нижнего конца вертикальной

трубки равна x_0 , а сама эта трубка полностью заполнена воздухом. Кран закрыт. В момент времени $t = 0$ кран открывают, и вода начинает вытекать из сосуда, а пузырьки воздуха проникать в сосуд через вертикальную трубку. Расход вытекающей жидкости равен ω (объем в единицу времени). Температура сосуда T , атмосферное давление p_0 , молярная масса M воздуха известны и остаются постоянными. Давлением насыщенных паров воды пренебречь. Считайте, что в ходе всего эксперимента уровень жидкости в сосуде не опустился ниже конца вертикальной трубки. Плотность воды равна ρ .

1. Чему равна масса m_0 воздуха в сосуде над водой в начальный момент времени?
2. Чему равна скорость μ изменения массы воздуха в сосуде в начальный момент времени?
3. С какой скоростью β изменяется μ (скорость изменения массы воздуха в сосуде) в процессе вытекания воды из него?

Возможное решение (Кармазин С.). Пусть ω – секундный расход воды, вытекающей из сосуда Мариотта (рис. 2). Скорость опускания уровня воды в сосуде $v = \omega / S$. Таким образом, объем воздуха над водой в сосуде изменяется со временем по закону:

$$V = S(H - x_0) + \omega t, \quad (1)$$

а уровень воды x :

$$x = x_0 - vt = x_0 - \frac{\omega}{S} t.$$

Давление воздуха над поверхностью воды изменяется со временем по закону:

$$p = p_0 - \rho g x = p_0 - \rho g x_0 + \rho g \frac{\omega}{S} t. \quad (2)$$

Найдём массу воздуха над водой:

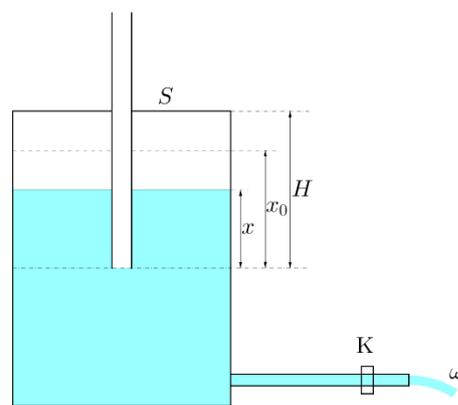


Рис. 2

$$m = \frac{M}{RT} pV = \frac{M}{RT} \left(p_0 - \rho g x_0 + \rho g \frac{\omega}{S} t \right) \left[S(H - x_0) + \omega t \right] =$$
$$\frac{M}{RT} S(H - x_0)(p_0 - \rho g x_0) + \frac{M}{RT} \omega \left[(p_0 - \rho g x_0) + \rho g(H - x_0) \right] t + \frac{M}{RT} \frac{\rho g (\omega t)^2}{S}.$$

Масса воздуха в сосуде над водой в начальный момент времени

$$m(0) = \frac{M}{RT} S(H - x_0)(p_0 - \rho g x_0).$$

Скорость изменения массы воздуха в сосуде в начальный момент времени

$$\mu(0) = \frac{dm}{dt} = \frac{M}{RT} \omega [p_0 + \rho g H - 2\rho g x_0].$$

Скорость β изменения μ (скорости изменения массы воздуха в сосуде)

$$\beta = \frac{d\mu}{dt} = 2 \frac{M}{RT} \frac{\rho g \omega^2}{S}.$$

Критерии оценивания

- | | |
|--|---------|
| 1) Найден объем воздуха над водой в сосуде | 1 балл |
| 2) Найден уровень воды в сосуде | 1 балл |
| 3) Найдено давление воздуха над поверхностью воды | 2 балла |
| 4) Найдена масса воздуха над водой | 3 балла |
| 5) Найдена масса воздуха в сосуде над водой в начальный момент | 1 балл |
| 6) Найдена скорость изменения массы воздуха в сосуде | 1 балл |
| 7) Найдена скорость изменения скорости изменения массы воздуха | 1 балл |

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

Задача 5. Зацепился! На электродвигатель постоянного тока установили датчик температуры. На верхнем этаже стройки поставили лебедку, приводимую в движение этим двигателем. В начале рабочего дня лебедка стала поднимать груз массой $M = 67,5$ кг. Не доехав всего один этаж до лебёдки, груз зацепился. На каком этаже это произошло? Зависимость температуры двигателя от времени $T(t)$ изображена на рис. 1. Известно, что на двигатель всегда подается одно и то же напряжение; трением в подшипниках двигателя и лебёдки пренебречь. Принять $g = 10$ м/с², высоту одного этажа 3 м, теплоемкость электродвигателя $C = 4,5$ кДж/°С.

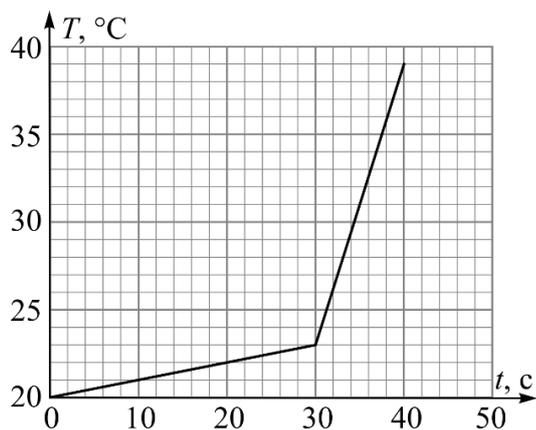


Рис. 1

Возможное решение (Юдин И.). Пусть двигатель подключен к сети с напряжением U_0 ; N_1 и N_2 – мощность тепловых потерь на первом и втором участке работы двигателя (с нагрузкой и с "заклиниванием"); I_0 – сила тока при работе двигателя, поднимающего груз; N_m – механическая мощность по поднятию груза, R – сопротивление обмотки двигателя, v – скорость груза, поднимаемого на 1 участке.

Энергетический баланс на 1 участке:

$$U_0 I_0 = N_1 + N_m, \quad (1)$$

где

$$N_1 = R I_0^2. \quad (2)$$

На участке 2 мощность, потребляемая двигателем

$$N_2 = \frac{U_0^2}{R}. \quad (3)$$

Заметим, что

$$N_1 N_2 = (I_0 U_0)^2. \quad (4)$$

Тогда с учётом (2), (3), (4) выражение (1) примет вид:

$$\sqrt{N_1 N_2} = N_1 + N_m,$$

откуда следует:

$$N_m = \sqrt{N_1 N_2} - N_1.$$

Из графика, данного в условии, находим

$$N_1 = C \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \right)_1 = 4500 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{°С}} \right) 0,1 \left(\frac{\text{°С}}{\text{с}} \right) = 450 \text{ Вт.}$$

$$N_2 = C \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \right)_2 = 4500 \left(\frac{\text{Дж}}{\text{°С}} \right) 1,6 \left(\frac{\text{°С}}{\text{с}} \right) = 7200 \text{ Вт.}$$

Механическая мощность $N_m = \sqrt{N_1 N_2} - N_1 = 1800 \text{ Вт} - 450 \text{ Вт} = 1350 \text{ Вт.}$

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

С другой стороны,

$$N_m = Mg\nu.$$

Из двух последних уравнений получим

$$\nu = \frac{N_m}{Mg} = 2 \text{ м/с}.$$

Высота, на которой зацепился груз

$$H = \nu t = 60 \text{ м} \text{ или на границе 20 и 21 этажей.}$$

Критерии оценивания

- | | |
|--|-----------|
| 1) Уравнения энергетического баланса для первого участка | 1 балл |
| 2) Уравнения энергетического баланса для второго участка | 1 балл |
| 3) Выражение для механической мощности через тепловые | 1 балл |
| 3) Вычисление тепловых мощностей из графика $T(t)$ (формула + число) | |
| на 1 участке (1+ 0,5 балла) | 1,5 балла |
| на 2 участке (1+ 0,5 балла) | 1,5 балла |
| 4) Выражение для скорости поднятия груза | 2 балла |
| численное значение | 1 балл |
| 5) Итоговый численный ответ | 1 балл |

18 января, на портале <http://abitunet/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitunet/vseros>