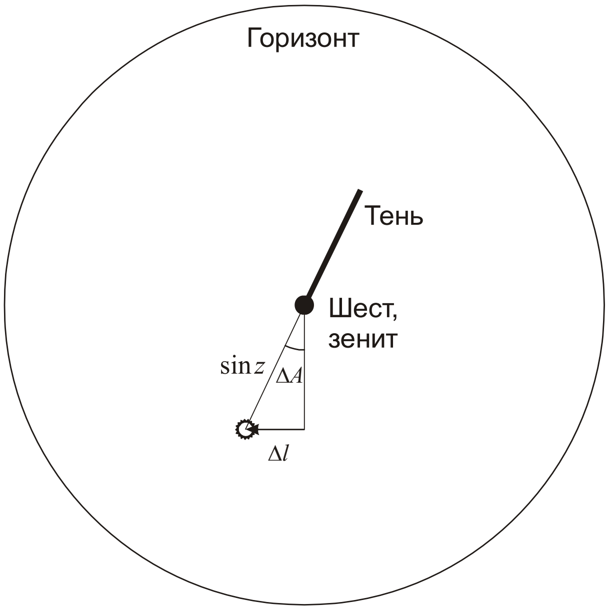
11 класс

1. Условие. Солнечные часы состоят из вертикального шеста высотой 4 м и плоского горизонтального циферблата. В какой-то момент тень от шеста двигалась по циферблату с угловой скоростью ровно 1 градус в минуту. На каких широтах на Земле это могло быть? Какая при этом могла быть максимальная длина тени? Угловыми размерами Солнца пренебречь.

1. Решение. Так как шест вертикальный, а тень фиксируется на горизонтальной плоскости, то ее угловая скорость есть скорость изменения азимута Солнца. Эта скорость оказывается, как минимум, в 4 раза большей угловой скорости суточного движения Солнца – последняя равна 0.25 градуса в минуту в моменты равноденствий и еще несколько меньше в солнцестояния. Описанная в условии картина может быть, если Солнце располагается недалеко от зенита. Рассмотрим проекцию небесной сферы единичного радиуса на горизонтальную плоскость (рисунок):



Обозначим угловую скорость Солнца в дни равноденствий (15° в час или 0.25° в минуту) как ω_0. За малый промежуток времени Δt Солнце пройдет на рисунке отрезок

$$\Delta l \leq \omega_0 \cos\delta \, \Delta t.$$

Здесь δ – склонение Солнца. Равенство будет достигаться в момент кульминации Солнца. За это время тень повернется на малый угол (рисунок):

$$\Delta A \leq \frac{\Delta l}{\sin z} \leq \frac{\omega_0 \cos\delta \, \Delta t}{\sin z}.$$

Здесь z – зенитное расстояние Солнца. Равенство вновь достигается в момент кульминации Солнца. Из условия задачи нам известна величина угловой скорости тени:

$$\Omega = \frac{\Delta A}{\Delta t} \leq \frac{\omega_0 \cos\delta}{\sin z}.$$

Отсюда мы получаем ограничение на зенитное расстояние:

$$\sin z \leq \frac{\omega_0 \cos\delta}{\Omega} = \frac{\cos\delta}{4}.$$

Если дело происходит в равноденствие, то зенитное расстояние Солнца не больше arcsin(1/4)=14.5°. Чтобы определить максимальную широту, нам нужно рассмотреть случай солнцестояния, когда склонение Солнца по модулю достигает величины ε (23.4°). Максимальная (по модулю) широта, на которой может выполняться данное условие, равна

$$\varphi_{MAX} = \varepsilon + \arcsin\left(\frac{\cos\varepsilon}{4}\right) = 36.7^{\circ}.$$

Картина может наблюдаться на широтах от –36.7° до +36.7°. Для длины тени выполняется выражение:

$$L = H\,\mathrm{tg}z \le H\sqrt{\frac{\omega_0^2\cos^2\delta}{\Omega^2 - \omega_0^2\cos^2\delta}} \le H\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\Omega^2 - \omega_0^2}} = 1.03 \text{ м.}$$

1. Система оценивания. Для решения задачи участники олимпиады должны сформулировать условие задачи в виде ограничения на зенитное расстояние Солнца. Данный этап оценивается в 4 балла. Если при этом участники олимпиады не учитывают множитель cos δ, принимая его равным единице, оценка за этот этап не изменяется. Если вместо синуса зенитного расстояния берется оно само в радианной мере, оценка также не изменяется. Однако, подобные ошибки являются основанием для снижения оценки за последующую часть решения – см. ниже.

Далее необходимо получить ограничение на модуль широты, которое оценивается в 2 балла. Еще 2 балла выставляется за нахождение длины тени. При этом участник олимпиады может учесть, что угол z мал и $\sin z \sim \mathrm{tg} z \sim z$. Это допущение, а также округление ответа до 1 м не является обоснованием для снижения оценки. Однако, если участник олимпиады не учитывает множитель cos δ и получает максимальную широту 37.9°, оценка снижается на 1 балл.

Если участник олимпиады указал, что Солнце должно располагаться на большой высоте, но при этом этапов решения не выполнил, ему выставляется итоговый 1 балл.

2. Условие. Далекая галактика, похожая на нашу Галактику Млечный Путь, имеет красное смещение 0.01. На угловом расстоянии 5′ от нее виден ее спутник – карликовая галактика. Оцените период ее обращения вокруг большой галактики.

2. Решение. Наличие красного смещения у галактики связано с эффектом Допплера. Красное смещение галактики z – это относительная величина, характеризующая изменение длины волны принимаемого излучения $\Delta\lambda$ по сравнению с лабораторной длиной волны λ_0:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}.$$

Галактика удаляется от нас со скоростью

$$v = c \cdot z = 3000 \text{ км / с}.$$

Здесь c – скорость света, z – красное смещение галактики. Расстояние до галактики можно найти по закону Хаббла:

$$L = v / H \sim 45 \text{ Мпк}.$$

Предположим, что линия, соединяющая галактику и ее спутник, находится в картинной плоскости. Тогда расстояние между галактиками равно

$$R = L\,\alpha\,(\text{рад}) \sim 65 \text{ кпк}$$

или $1.3 \cdot 10^{10}$ а.е. Здесь α – угловое расстояние между галактиками на небе. Предположим, что галактика-спутник движется по круговой орбите с радиусом R. Масса центральной галактики примерно равна массе галактики Млечный путь (10^{12} масс Солнца), масса спутника существенно меньше. Период обращения T, выраженный в годах, можно найти из III закона Кеплера, выразив массу центральной галактики M в массах Солнца, а радиус орбиты – в астрономических единицах:

$$T(\text{годы}) = \sqrt{\frac{R^3(\text{а.е.})}{M(M_0)}} = 1.5 \cdot 10^9.$$

2. Система оценивания. На первом этапе решения участники олимпиады должны определить расстояние до галактики, что оценивается в 3 балла. Определение расстояния между галактикой и ее спутником оценивается в 2 балла. При этом участники олимпиады могут предположить, что расстояние до галактик не является одинаковым, что приведет к несколько большему значению расстояния между галактиками (умножение на фактор $(3/2)^{1/2}$, то есть до 80 кпк) и, в дальнейшем, к большему периоду обращения (до 2 млрд лет). Это не является ошибкой и не влияет на итоговую оценку. Вычисление периода обращения оценивается в 3 балла. Участники олимпиады могут принимать несколько меньшее значение массы галактики, однако при массе, меньшей $3 \cdot 10^{11}$ масс Солнца, оценка снижается на 1 балл, а при массе, меньшей 10^{11} масс Солнца – снижается на 2 балла.

3. Условие. Ученые будущего предложили фантастический проект, в ходе которого весь грунт на поверхности Марса электрохимическим способом был бы разложен на свободные металл и кислород, и таким образом была бы создана кислородная атмосфера на планете. Какова толщина слоя грунта, который нужно переработать, чтобы давление такой кислородной атмосферы у поверхности Марса оказалось таким же, как атмосферное давление у поверхности Земли? Считать, что грунт Марса состоит из минерала лимонита с химической формулой Fe_2O_3 и плотностью 3.5 г/см^3. Атомные веса железа и кислорода составляют 56 и 16 соответственно.

3. Решение. Атмосферное давление у поверхности Земли p составляет 10^5 Па и равно весу столба атмосферы площадью 1 м^2. Все то же самое будет относиться и к Марсу, но нельзя забывать, что ускорение свободного падения g на Марсе другое. Масса этого столба с площадью основания 1 м^2 составит:

$$m_\mathrm{S} = \frac{p}{g} = \frac{pR^2}{GM}.$$

Здесь M и R – масса и радиус Марса. Данное выражение можно получить другим, более сложным способом. Концентрация атомов в атмосфере у поверхности Марса равна

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Здесь k – постоянная Больцмана, T – температура атмосферы. Число атомов в столбе атмосферы единичной площади есть произведение концентрации на высоту однородного столба атмосферы H:

$$n_\mathrm{S} = nH = \frac{p}{kT} \cdot \frac{\Re T}{\mu g} = \frac{N_\mathrm{A} p}{\mu g} = \frac{p}{mg}.$$

Здесь N_A – постоянная Авогадро, μ и m – молярная и молекулярная масса газа. Учитывая, что $m_\mathrm{S} = m \cdot n_\mathrm{S}$, мы вновь приходим к первой формуле решения задачи.

Масса столба оказывается равной $2.7 \cdot 10^4$ кг/м^2. Обратим внимание, что высота атмосферы и толщина грунта существенно меньше радиуса планеты, ускорение свободного падения мы считаем постоянным. Массовая доля кислорода в молекуле Fe_2O_3 равна

$$\eta = \frac{3A_{\mathrm{O}}}{2A_{\mathrm{Fe}} + 3A_{\mathrm{O}}} \approx 0.31.$$

Здесь A_{O} и A_{Fe} – атомные веса кислорода и железа. Чтобы наполнить столб атмосферы требуемым количеством кислорода, нужно переработать столб грунта Марса той же площади (так как обработке подвергается вся планета) глубиной h. Масса этого столба будет равна

$$m_{\mathrm{GS}} = \frac{m_{\mathrm{S}}}{\eta} = m_{\mathrm{S}} \frac{2A_{\mathrm{Fe}} + 3A_{\mathrm{O}}}{3A_{\mathrm{O}}}.$$

Масса столба получается равной $9 \cdot 10^4$ кг/м^2. Теперь мы можем найти его глубину

$$h = m_{\mathrm{GS}}/\rho = 25 \text{ м}.$$

Здесь ρ – плотность грунта, которую нужно перевести в нужные единицы (при выполнении решения в системе СИ – в кг/м^3).

3. Система оценивания. Существует несколько подходов к решению данного задания. Участники олимпиады могут вычислять требуемую массу кислорода как в расчете на единицу площади (1 м^2 или 1 см^2 в зависимости от используемой системы единиц), так и в расчете на всю поверхность Марса. Правильное определение массы атмосферы на единицу площади в виде формулы или числа оценивается в 3 балла. Эффективным и самым простым методом выполнения этого этапа является представление давления как веса столба атмосферы единичной площади. Участники могут проводить выкладки через величину однородного столба атмосферы и даже пытаться вычислить температуру Марса. Это излишние шаги, но при условии правильности вычислений они оцениваются в полной мере.

Вычисление массы грунта на единичную площадь (или площадь поверхности Марса) оценивается в 2 балла. Если при этом участник олимпиады не учитывает или неправильно учитывает количество атомов кислорода и железа в молекуле Fe_2O_3, данные 2 балла не ставятся, но другие этапы решения оцениваются в полной мере. Наконец, определение глубины переработки грунта оценивается в 3 балла.

4. Условие. Видимая звездная величина звезды Регул равна $+1.4^m$, расстояние до нее 24 пк, масса – 3.5 массы Солнца, период осевого вращения – 16 часов. Исходя из этих данных, найдите минимально возможное значение температуры поверхности Регула.

4. Решение. Определим абсолютную звездную величину Регула:

$$m_A = m + 5 - 5\lg d = -0.5.$$

Здесь d – расстояние до Регула. С учетом того, что абсолютная звездная величина Солнца равна $+4.7^m$, получаем, что светимость Регула L больше светимости Солнца L_0 в $10^{0.4\cdot 5.2} = 120$ раз. Для светимостей L, радиусов R и температур T справедливо соотношение (индекс «0» относится к Солнцу):

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4.$$

Отсюда мы получаем выражение для температуры поверхности Регула:

$$T = T_0 \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/4} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{1/2}.$$

Нам неизвестен радиус Регула R, но известен период его обращения вокруг своей оси t. Определим, при каком радиусе R физическое тело может вращаться с таким периодом и не быть разорванным центробежными силами. Для этого его скорость на экваторе не должна превышать первую космическую:

$$\frac{2\pi R}{t} < \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Здесь M – масса звезды. Мы не учитываем здесь вклад тепловой скорости частиц, что будет обосновано далее. Получаем:

$$R < \left(\frac{GMt^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 5R_0.$$

В итоге,

$$T > T_0 \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/4} \left(\frac{4\pi^2 R_0^3}{GMt^2}\right)^{1/6} \sim 1.5T_0 \sim 9000\,\text{K}.$$

Добавим, что при граничном значении температуры (9000 K) мы будем иметь радиус Регула в 5 радиусов Солнца и скорость осевого вращения на экваторе примерно 380 км/с. Это несравнимо больше тепловой скорости атомов водорода, соответствующей данной температуре (10 км/с), что оправдывает допущение, сделанное выше. Реальная температура на экваторе Регула немногим более 10000 K, то есть звезда находится на грани динамической устойчивости.

4. Система оценивания. Для решения задачи участники олимпиады должны получить значение светимости Регула, что оценивается в 2 балла. Выражение температуры Регула в зависимости от его радиуса из закона Стефана-Больцмана оценивается в 2 балла. Определение максимально возможного радиуса Регула исходя из его динамической устойчивости оценивается в 2 балла, еще 2 балла выставляется за вычисление минимальной температуры. Обоснование того, что тепловое движение атомов не влияет на ситуацию, не является обязательным.

Участники олимпиады могут пытаться определить значение радиуса Регула из напрямую из соотношения "радиус-светимость", указывая, что Регул – звезда главной последовательности, после чего найти его температуру. Однако, вследствие неточности соотношения "радиус-светимость" эта температура (около 12000 K) будет даже выше истинной температуры Регула (10000 K) и не может считаться минимально возможной температурой. При условии правильности вычислений подобное решение оценивается в 5 баллов (2 балла за значение светимости Регула, 2 балла за применение закона Стефана-Больцмана и 1 балл за применение соотношения "радиус-светимость").

Возможно решение задания, при котором участник олимпиады будет предполагать, что устойчивость звезды определяется только тепловым движением атомов, забыв про вращение звезды. В этом случае он будет приравнивать тепловую скорость атомов к первой (или даже второй) космической скорости, что приведет его к очень низкой величине минимальной температуры (порядка десятков кельвин). Такое решение может оцениваться не более, чем в 4 балла, при условии правильного вычисления светимости Регула и связи температуры с радиусом и светимостью по закону Стефана-Больцмана.

5. Условие. В Галактике Млечный Путь раз в 20 лет вспыхивают Сверхновые II типа с абсолютной звездной величиной -18^m. Насколько часто такие Сверхновые появляются в небе

Земли с блеском ярче Венеры (-4^m)? Радиус Галактики считать равным 15 кпк, поглощение света составляет 2^m на кпк.

5. Решение. Для решения задачи необходимо найти расстояние до сверхновой звезды, при котором она светила бы в небе Земли с блеском Венеры. В условиях межзвездного поглощения звездная величина объекта зависит от расстояния до него как:

$$m = M - 5 + 5 \lg r + E \cdot r,$$

где M – абсолютная звездная величина, E – величина поглощения (0.002^m на пк), расстояние r выражается в парсеках. Подставляя имеющиеся у нас значения видимой и абсолютной звездной величины, получаем:

$$5 \lg r + E \cdot r = 19.$$

Это уравнение можно решить подбором значения ответа, в результате получаем:

$$r \sim 1500 \text{ пк}.$$

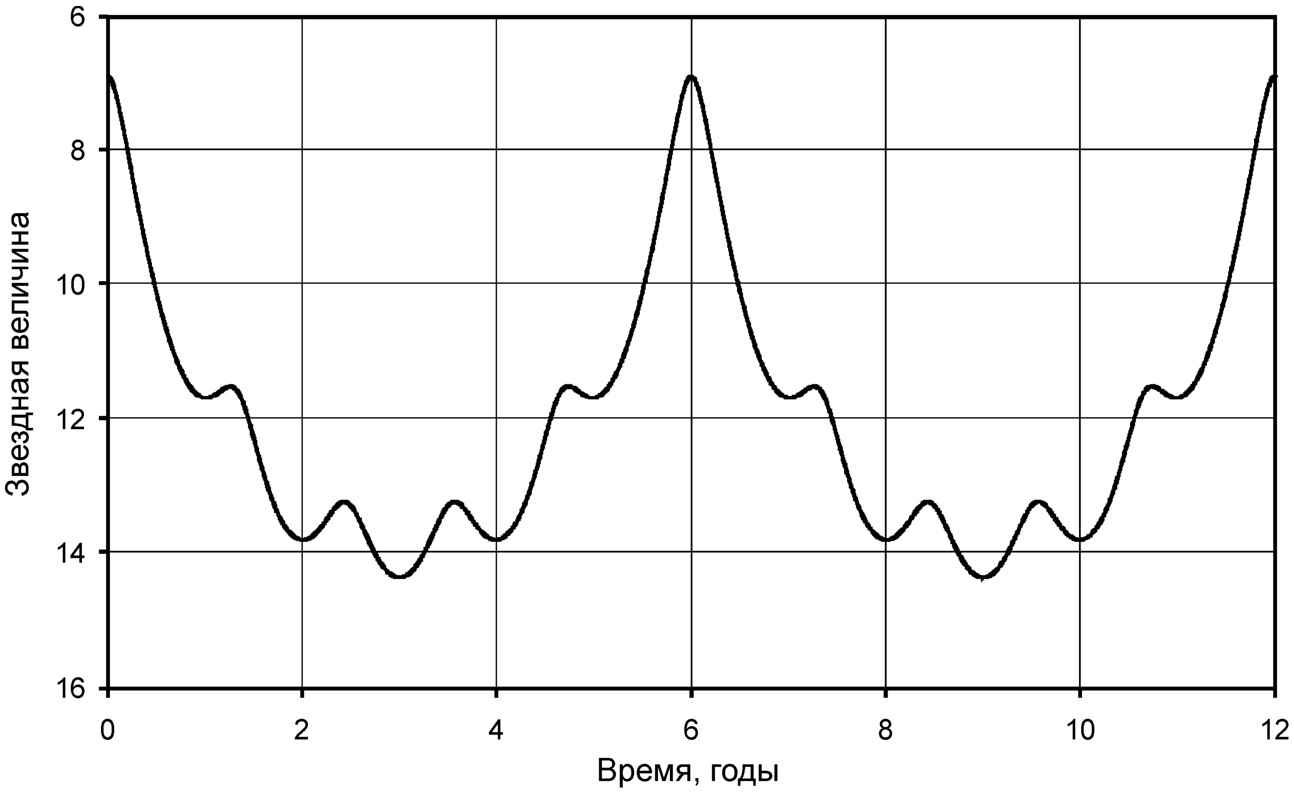
Учтем далее, что Сверхновые II типа взрываются только в диске Галактики, толщина которого меньше, чем полученное значение r. Чтобы определить, какая доля этих Сверхновых может иметь заданную яркость, нужно вычислить отношение площади круга с радиусом r и площади всего диска:

$$\eta = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{100}.$$

Получаем, что лишь каждая сотая Сверхновая может светить в небе Земли ярче Венеры. Такие сверхновые будут появляться на нашем небе в среднем раз в ($100 \cdot 20$) = 2000 лет.

5. Система оценивания. Первая часть решения задачи состоит в нахождении расстояния, при котором Сверхновая будет иметь заданный блеск в небе Земли. Эта часть решения оценивается в 4 балла. Если при этом участник олимпиады не учитывает межзвездное поглощение (с ответом около 6 кпк) либо учитывает его некорректно, оценка уменьшается на 3 балла, но оставшаяся часть решения оценивается в полной мере. Вторая часть решения связана с определением частоты ярких Сверхновых и оценивается в 4 балла. Если при расчетах Галактика предполагается шаром (с в 10 раз меньшей итоговой частотой Сверхновых), то общая оценка уменьшается на 3 балла.

6. Условие. На рисунке показана зависимость звездной величины некоторой кометы на Земле от времени. Определите большую полуось и эксцентриситет орбиты кометы. Считать, что орбита лежит в плоскости эклиптики и не заходит внутрь орбиты Земли. Светимость кометы обратно пропорциональна четвертой степени ее расстояния от Солнца, комета рассеивает свет равномерно во всех направлениях. Орбиту Земли считать круговой.



6. Решение. По условию задачи, светимость кометы достаточно резко зависит от ее расстояния до Солнца. Звездная величина кометы, регистрируемая на Земле, меняется вследствие изменения расстояний между кометой и Солнцем и между кометой и Землей.

Чтобы решить задачу наиболее простым способом, обратим внимание, что зависимость звездной величины кометы полностью повторяется через 6 лет. Более того, этот период кратен земному году, то есть периоду обращения Земли вокруг Солнца. По истечении 6 лет Земля оказывается в той же точке орбиты, следовательно, комета также проходит ту же точку своей орбиты. Следовательно, промежуток времени в 6 лет содержит кратное число периодов обращения кометы вокруг Солнца.

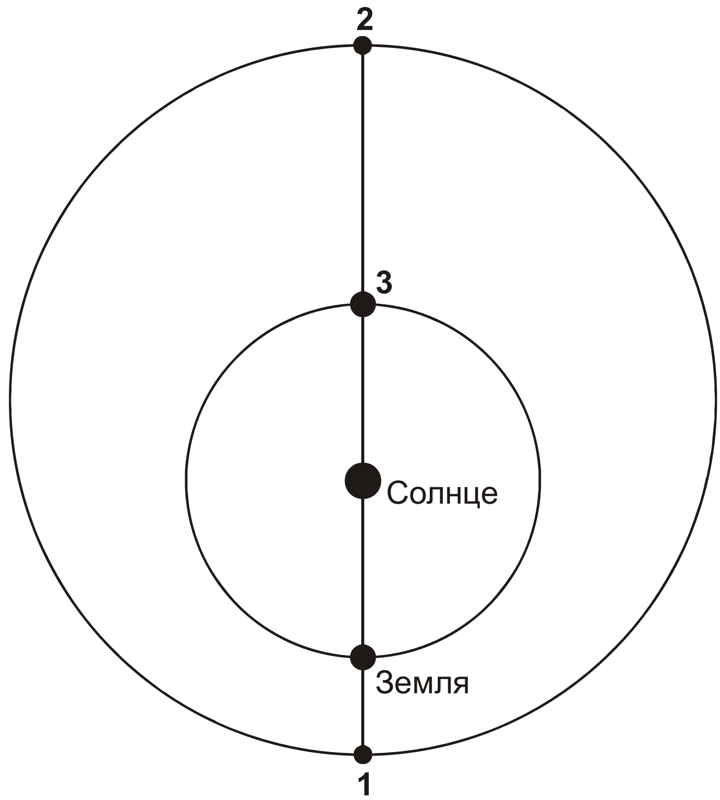
Блеск кометы становится максимальным (звездная величина минимальна) в моменты 0, 6 и 12 лет. В это время профиль кривой блеска симметричен относительно максимума. Следовательно, в это же время комета располагается в точке перигелия орбиты и при этом находится либо в противостоянии, либо в соединении с Солнцем.

Между главными максимумами видно еще по 4 максимума блеска и 5 минимумов между ними. Они вызваны тем, что комета периодически оказывается в противостоянии с Солнцем, приближаясь к Земле, и в соединении с ним, удаляясь от Земли. Если бы комета двигалась по орбите навстречу Земле (в противоположном направлении), то за 6 лет наблюдалось бы более 6 соединений и противостояний. Наличие 5 минимумов блеска говорит о пяти соединениях за 6-летний период. Следовательно, синодический период кометы S не превышает 1.2 года (в реальности, он точно равен этой величине, как можно убедиться по графику). Учитывая, что комета находится дальше от Солнца, чем Земля, ее орбитальный период T может быть найден по формуле:

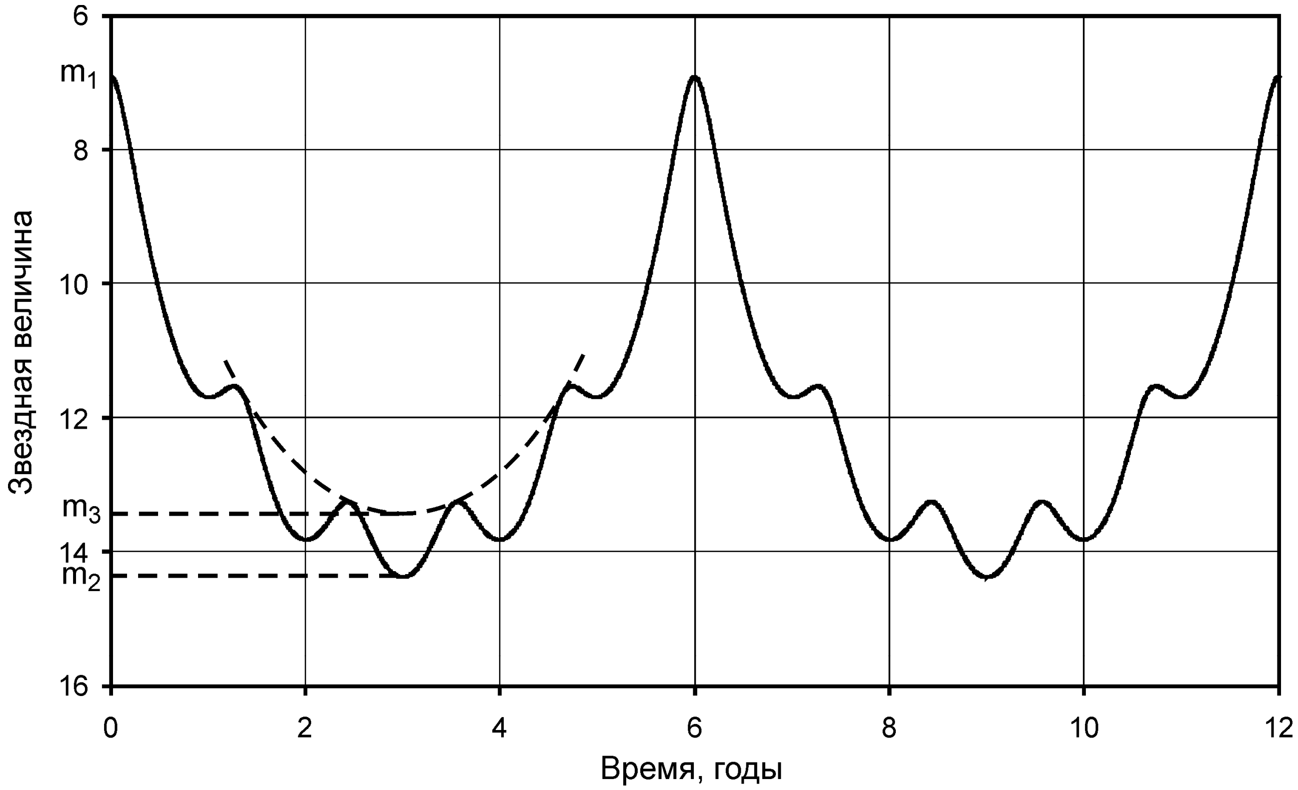
$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}.$$

Здесь T_0 – орбитальный период Земли (один год). Период T составляет ровно 6 лет, и комета движется по орбите в том же направлении, что и Земля. Большая полуось орбиты кометы составляет

$$a = 6^{2/3} = 3.3 \text{ а.е.}$$



На графике видно, что в моменты времени 3 года и 9 лет комета находится в соединении с Солнцем на максимальном удалении от Земли (положение 2 на рисунке). Наша планета в это время занимает то же положение, что и в моменты времени 0, 6 и 12 лет. Значит, в эти моменты комета находится в положении 1, в противостоянии с Солнцем (по условию задачи, она не заходит внутрь орбиты Земли). Дальнейшее решение можно производить разными способами. В частности, можно определить по графику звездные величины кометы в эти два момента:



$$m_1 = 6.9;\ m_2 = 14.4.$$

Отношение видимых яркостей кометы в эти моменты:

$$K = 10^{0.4(m_2 - m_1)} = 1000.$$

Пусть r – радиус орбиты Земли, e – эксцентриситет орбиты кометы. Расстояние от Земли до кометы в моменты 1 и 2 равны:

$$d_1 = a\,(1 - e) - r;$$
$$d_2 = a\,(1 + e) + r;$$

С учетом зависимости яркости кометы от расстояний до Солнца и Земли имеем:

$$K = \frac{d_2^2}{d_1^2} \cdot \frac{(1+e)^4}{(1-e)^4}.$$

В итоге, мы получаем кубическое уравнение для эксцентриситета:

$$\sqrt{K} = \frac{a(1+e)+r}{a(1-e)-r} \cdot \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2},$$

которое можно решить численным подбором, получив значение эксцентриситета: $e = 0.4$. Однако, существует более простой способ. С точностью до 0.1^m можно определить, какую звездную величину имела бы комета в афелии (положение 2), находись она при этом в противостоянии (Земля в положении 3). Эта величина составляет

$$m_3 = 13.4.$$

Эта величина отличается от m_2 только за счет меньшего расстояния от Земли. Тогда мы можем записать

$$K_2 = 10^{0.4(m_2 - m_3)} = 2.5 = \left(\frac{a(1+e)+r}{a(1+e)-r} \right)^2.$$

Отсюда имеем

$$e = \frac{r}{a} \frac{\sqrt{K_2}+1}{\sqrt{K_2}-1} - 1 = 0.35,$$

что можно считать хорошим приближенным ответом.

6. Система оценивания. Для решения задачи участники должны установить, что комета обращается по своей орбите с периодом в 6 лет и получить из этого величину большой полуоси ее орбиты. Данный этап решения оценивается в 3 балла (при раздельном выполнении 2 балла ставится за определение периода 1 балл – за определение большой полуоси). Участники могут сделать это развернутым способом, как приведено выше, а могут сразу оценить синодический период кометы (1.2 года) и вычислить из него орбитальный период, что также считается правильным. Если участник сразу и без обоснования пишет, что орбитальный период кометы составляет 6 лет, то 2 балла за первый этап решения не выставляются, но дальнейшее решение оценивается в полной мере (максимальная оценка – 6 баллов).

Вывод о том, что в моменты времени 0, 6 и 12 лет комета находится в перигелии и противостоянии, а в моменты времени 3 и 9 лет – в афелии и соединении (сделанный в явном виде либо следующий из рисунка), оценивается в 2 балла. Вычисление эксцентриситета орбиты кометы оценивается в 3 балла, причем это может делаться точным методом на основе анализа величин m_1 и m_2, возможно использование приближенного метода, аналогичного описанному выше. Значения эксцентриситета в интервале от 0.3 до 0.5 могут считаться правильными.