

9 класс

1. В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу весов, а любые три – на правую, то левая чаша перевесит. Пять слонов встали на левую чашу и четыре – на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

Ответ: не обязательно.

Решение. Приведём контрпример. Пусть пять слонов весят по 7 тонн, а ещё пять – по 9 тонн каждый. Тогда любые четыре слона на левой чаше весов вместе весят не менее, чем $4 \cdot 7 = 28$ тонн, а любые три слона на правой – не более, чем $3 \cdot 9 = 27$ тонн, и левая чаша действительно перевесит.

Но если пять “лёгких” слонов общей массой $5 \cdot 7 = 35$ тонн встанут на левую чашу весов, а четыре “тяжёлых” слона общей массой $4 \cdot 9 = 36$ тонн на правую, то перевесит правая чаша.

Существует и много других контрпримеров. В приведенном примере масса слонов правдоподобна. От школьников этого не требуется.

Критерии проверки.

“+” – приведен любой верный контрпример с доказательством его пригодности

“±” – приведен верный контрпример, но не объяснена его пригодность

“-” – приведен верный ответ с неверным контрпримером

“-” – приведен только ответ

2. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

Ответ: четыре числа.

Решение. Оценка. Так как любые два записанных числа взаимно просты, то каждое из простых чисел 2, 3, 5 и 7 может войти в разложение на множители не более, чем одного из них. Если же на доске пять или более чисел, то все простые множители в разложении какого-то из них должны быть не меньше, чем 11. Но это составное число, значит, оно не меньше, чем 121. Это противоречит условию: все записанные числа двузначные. Следовательно, на доске записано не более четырёх чисел.

Пример. 25, 26, 33, 49.

Существуют и другие примеры.

Критерии проверки.

“+” – приведено полное обоснованное решение

“±” – приведена верная оценка, но пример не приведен или он неверен

“+” – приведены только верный ответ и верный пример

“-” – приведен только ответ

“-” – задача не решена или решена неверно

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE . Точки M и N – основания перпендикуляров, опущенных на прямую DE из точек A и C соответственно. Докажите, что $ME = DN$.

Решение. Так как $\angle ADC = \angle AEC$, то четырехугольник $AEDC$ – вписанный. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. По свойству вписанного четырехугольника $\angle NDC = \angle BAC = \alpha$, $\angle MEA = \angle BCA = \gamma$ (см. рис. 9.3а). Тогда, используя прямоугольные треугольники AME и AEC , получим: $ME = AE \cdot \cos \gamma = AC \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma$. Аналогично, $DN = DC \cdot \cos \alpha = AC \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha$.

Следовательно, $ME = DN$, что и требовалось.

Отметим, что использованные равенства углов можно получить из подобия треугольников DCE и ABC , которое, в свою очередь, можно получить из подобия треугольников ABD и CBE (если не использовать окружность).

Второй способ. Воспользуемся тем, что центром окружности, описанной около $AEDC$, является середина O стороны AC . Так как треугольник DOE – равнобедренный, то его высота OK является и его медианой, т.е. $EK = KD$ (см. рис. 9.3б). Прямые AM , OK и CN перпендикулярны прямой ED , поэтому параллельны друг другу. Из того, что $AO = OC$ по теореме Фалеса следует, что $MK = KN$. Тогда $ME = MK - EK = KN - KD = DN$, что и требовалось.

И в этом способе решения необязательно “напрямую” использовать окружность. Равенство $OE = OD$ следует из того, что эти отрезки являются медианами прямоугольных треугольников с общей гипотенузой и проведены к ней.

Критерии проверки.

“+” – приведено полное обоснованное решение

Рис. 9.3а

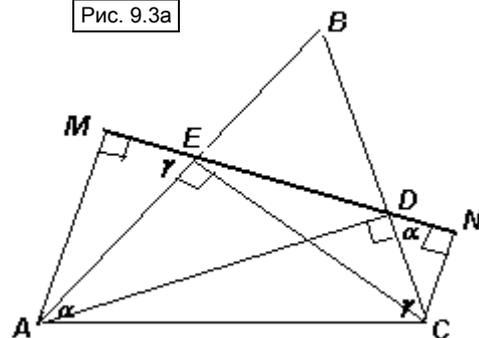
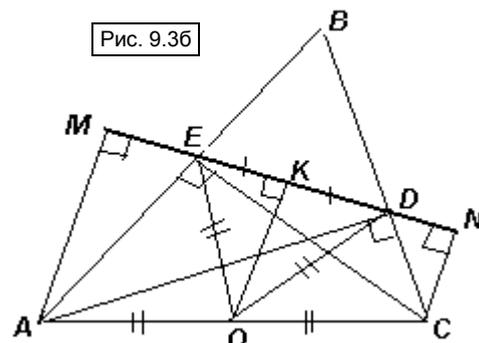


Рис. 9.3б



“±” – приведено верное в целом решение с пробелами в обосновании или с ошибкой, не меняющей логики доказательства (например, перепутаны синус и косинус)

“–” – задача не решена или решена неверно

4. Что больше: $\sqrt{2016} + \sqrt{2015 + \sqrt{2016}}$ или $\sqrt{2015} + \sqrt{2016 + \sqrt{2015}}$?

Ответ: $\sqrt{2016} + \sqrt{2015 + \sqrt{2016}} > \sqrt{2015} + \sqrt{2016 + \sqrt{2015}}$.

Решение. Первый способ. Пусть $a = \sqrt{2016} + \sqrt{2015 + \sqrt{2016}} > 0$, $b = \sqrt{2015} + \sqrt{2016 + \sqrt{2015}} > 0$. Тогда $a^2 - b^2 = (\sqrt{2016} + \sqrt{2015 + \sqrt{2016}})^2 - (\sqrt{2015} + \sqrt{2016 + \sqrt{2015}})^2 = \sqrt{2016} - \sqrt{2015} + 2\sqrt{2016 \cdot 2015 + 2016\sqrt{2016}} - 2\sqrt{2016 \cdot 2015 + 2015\sqrt{2015}} > 0$, так как $\sqrt{2016} > \sqrt{2015}$ и $2016\sqrt{2016} > 2015\sqrt{2015}$ (функция $y = \sqrt{x}$ – возрастающая). Следовательно, $a^2 > b^2$, то есть $a > b$.

Второй способ. Сравним $\sqrt{2016} - \sqrt{2015}$ и $\sqrt{2016 + \sqrt{2015}} - \sqrt{2015 + \sqrt{2016}}$. Разделим второе число на первое и сравним частное с единицей. Для этого преобразуем полученную дробь, используя умножение числителя и знаменателя на одно и то же число, отличное от нуля. Получим:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2016 + \sqrt{2015}} - \sqrt{2015 + \sqrt{2016}}) : (\sqrt{2016} - \sqrt{2015}) = \\ & = \frac{(2016 + \sqrt{2015}) - (2015 + \sqrt{2016})}{(\sqrt{2016 + \sqrt{2015}} + \sqrt{2015 + \sqrt{2016}})(\sqrt{2016} - \sqrt{2015})} = \\ & = \frac{(1 + \sqrt{2015} - \sqrt{2016})(\sqrt{2016} + \sqrt{2015})}{\sqrt{2016 + \sqrt{2015}} + \sqrt{2015 + \sqrt{2016}}} = \frac{\sqrt{2016} + \sqrt{2015} - 1}{\sqrt{2016 + \sqrt{2015}} + \sqrt{2015 + \sqrt{2016}}} < 1, \quad \text{так как} \\ & \sqrt{2016} < \sqrt{2016 + \sqrt{2015}}, \text{ а } \sqrt{2015} < \sqrt{2015 + \sqrt{2016}}. \end{aligned}$$

Умножив обе части неравенства $(\sqrt{2016 + \sqrt{2015}} - \sqrt{2015 + \sqrt{2016}}) : (\sqrt{2016} - \sqrt{2015}) < 1$ на положительное число $\sqrt{2016} - \sqrt{2015}$, получим, что $\sqrt{2016 + \sqrt{2015}} - \sqrt{2015 + \sqrt{2016}} < \sqrt{2016} - \sqrt{2015} \Leftrightarrow \sqrt{2016} + \sqrt{2015 + \sqrt{2016}} > \sqrt{2015} + \sqrt{2016 + \sqrt{2015}}$.

Критерии проверки.

“+” – приведено полное обоснованное решение

“±” – приведены верные выкладки, но допущены неточности в обоснованиях или логические погрешности

“–” – приведен только ответ

“–” – задача не решена или решена неверно

5. Германн и Чекалинский разложили на столе 13 различных карт. Каждая карта может лежать в одном из двух положений: рубашкой вверх или рубашкой вниз. Игроки должны по очереди переворачивать по одной карте. Проигрывает тот игрок, после хода которого повторится какая-то из предыдущих ситуаций (включая изначальную). Первый ход сделал Чекалинский. Кто сможет выиграть независимо от того, как будет играть соперник?

Ответ. Чекалинский.

Решение. Выигрышная стратегия Чекалинского состоит в том, чтобы каждый раз переворачивать одну и ту же карту (например, пиковую даму). Все возможные позиции можно разбить на пары, отличающиеся лишь расположением пиковой дамы. Если в ответ на ход Чекалинского Германн тоже перевернёт пиковую даму, то повторится предыдущая позиция, и он проиграет. Поэтому он вынужден переворачивать другую карту. А Чекалинский, перевернув в ответ пиковую даму, получит позицию, парную к той, которая только что была. Таким образом, каждым ходом Германну придётся “начинать” новую пару, и Чекалинский всегда сможет сделать ответный ход, “закончив” пару. Так как количество возможных позиций конечно, то рано или поздно Германн не сможет открыть новую пару и проиграет.

Критерии проверки.

“+” – приведена верная стратегия и доказано, что она выигрышная

“±” – приведена верная стратегия, но доказательство того, что она выигрышная, недостаточно убедительно

“+” – приведена верная стратегия, но доказательство того, что она выигрышная, отсутствует или абсолютно неверно

“–” – выигрышная стратегия не указана или проверяющему неясно, является ли приведённая стратегия выигрышной.

“–” – задача не решена или решена неверно

Комментарий. В некоторых математических играх можно определить победителя и без приведения конкретной стратегии. Но авторы варианта полагают, что в данной задаче это не так.

6. Высоты неравностороннего остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . O — центр описанной окружности треугольника BHC . Центр I вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке OA . Найдите угол BAC .

Рис. 9.6а

Ответ. 60° .

Решение. Из условия задачи следует, что точка O лежит на пересечении биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к стороне BC . Так как эти прямые пересекаются на описанной окружности треугольника ABC , то O лежит на этой окружности и является серединой дуги BC (см. рис. 9.6 а, б). Кроме того, $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, так как H — ортоцентр треугольника ABC . Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Обозначим углы треугольника ABC : $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. (см. рис. 9.6а) Тогда $\angle OCB = \angle OAB = \alpha/2$, $\angle BCH = 90^\circ - \beta$, $\angle OCH = \angle OCB + \angle BCH = 90^\circ + \alpha/2 - \beta$.

В треугольнике OHC : $OH = OC$ (радиусы одной окружности), поэтому $\angle OHC = \angle OCH = 90^\circ + \alpha/2 - \beta$. Аналогично, $\angle OHB = \angle OBH = 90^\circ + \alpha/2 - \gamma$. Тогда $\angle BHC = \angle OHB + \angle OHC = 90^\circ + \alpha/2 - \gamma + 90^\circ + \alpha/2 - \beta = 180^\circ + \alpha - \gamma - \beta = 2\alpha$.

Так как $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$, то получим уравнение $2\alpha = 180^\circ - \alpha$, откуда $\alpha = 60^\circ$.

Второй способ. Воспользуемся тем, что окружность, описанная около треугольника BHC , симметрична описанной окружности треугольника ABC относительно прямой BC (см. рис. 9.6б). Тогда центр P описанной окружности треугольника ABC лежит на дуге BHC . Следовательно, $\angle BHC = \angle BPC = 2\angle BAC$. Из того, что $180^\circ - \angle BAC = 2\angle BAC$, получим: $\angle BAC = 60^\circ$.

Критерии проверки.

“+” — приведено полное обоснованное решение

“±” — приведено верное в целом решение с незначительными пробелами в обоснованиях

“⊖” — приведены верные рассуждения, но допущена ошибка в счете углов, которая привела к неверному ответу

“⊘” — доказано, что точка O принадлежит описанной окружности треугольника ABC , но других продвижений нет

“—” — приведен только ответ

“_” — задача не решена или решена неверно

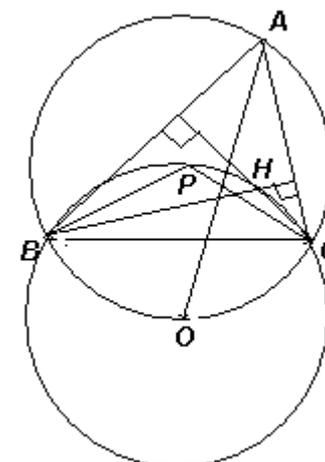
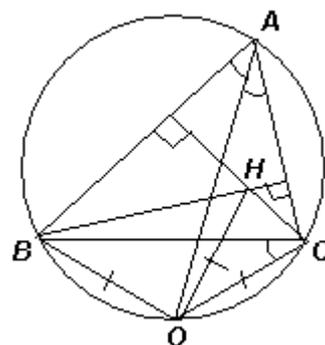


Рис. 9.6б