8 класс

1. Последняя цифра в записи натурального числа в 2016 раз меньше самого числа. Найдите все такие числа.

Ответ: 4032, 8064, 12096, 16128.

Решение. Пусть x – последняя цифра числа. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Число $2016x$ должно оканчиваться на цифру x. Следовательно, x – четная цифра, причем $x \neq 0$. Проверкой убеждаемся, что значения x, равные 2, 4, 6 и 8 удовлетворяют условию.

Можно также провести полный перебор всех возможных значений x: проверить все цифры от 0 до 9.

Второй способ. Пусть искомые числа имеют вид $\overline{ax} = 10a + x$, где a – некоторое натуральное число. Тогда $10a + x = 2016x \Leftrightarrow 2a = 403x$. Так как 2 и 403 взаимно простые числа, то a делится на 403, а x делится на 2. Подставляя, например, в полученное равенство значения x, равные 2, 4, 6 и 8, находим соответствующие значения a и получаем ответ.

Критерии проверки.

"+" – *приведено полное обоснованное решение (любым из способов, независимо от его рациональности)*

"±" – *приведен только полностью верный ответ*

"∓" – *приведено верное рассуждение, но в ответе пропущено какое-то одно из чисел*

"–" – *в ответе верно приведено не более двух чисел*

"–" – *задача не решена или решена неверно*

2. Расставьте в левой части равенства $\frac{1}{a}\quad\frac{1}{a}\quad\frac{1}{a}\quad\frac{1}{a}\quad\frac{1}{a} = (a+1)(a-1)$ знаки арифметических операций и скобки так, чтобы равенство стало верным для всех *a,* отличных от нуля.

Ответ: например, так: $(\frac{1}{a} : (\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}) - \frac{1}{a}) : \frac{1}{a} = (a+1)(a-1)$.

Существуют и другие примеры.

Критерии проверки

"+" – *приведена любая верная расстановка знаков и скобок*

"–" – *задача не решена или решена неверно*

3. Точки пересечения графиков четырех функций, заданных формулами $y = kx + b$, $y = kx - b$, $y = mx + b$ и $y = mx - b$, являются вершинами четырехугольника. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

Ответ: (0; 0).

Решение. Графики данных линейных функций – это две пары параллельных прямых, так как равны угловые коэффициенты у первой и второй прямой и угловые коэффициенты у третьей и четвертой прямой. Значит, точки пересечения графиков являются вершинами параллелограмма. Две противоположные вершины этого параллелограмма – это $M(0; b)$ и $N(0; -b)$. Так как диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся точкой пересечения пополам, то искомая точка – середина отрезка MN, то есть точка (0; 0).

Критерии проверки.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*

"±" – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

"∓" – *приведен только верный ответ*

"–" – *задача не решена или решена неверно*

4. В классе учатся 30 человек: отличники, троечники и двоечники. Отличники на все вопросы отвечают правильно, двоечники всегда ошибаются, а троечники на заданные им вопросы строго по очереди то отвечают верно, то ошибаются. Всем ученикам было задано по три вопроса: "Ты отличник?", "Ты троечник?", "Ты двоечник?". Ответили "Да" на первый вопрос – 19 учащихся, на второй – 12, на третий – 9. Сколько троечников учится в этом классе?

Ответ: 20 троечников

Решение. Пусть a – количество отличников, b – количество двоечников, c – количество троечников, которые ошиблись в ответе на первый вопрос, правильно ответили на второй и ошиблись в ответе на третий (назовем таких троечников троечниками первого типа), а d – количество троечников, которые правильно ответили на первый вопрос, ошиблись в ответе на второй и правильно ответили на третий (назовем таких троечников троечниками второго типа).

На первый вопрос ответили "Да" отличники, двоечники и троечники первого типа, следовательно, $a + b + c = 19$. На второй вопрос "Да" ответили двоечники и троечники первого типа, то есть $b + c = 12$. На третий вопрос "Да" ответили только троечники первого типа, то есть $c = 9$. Тогда из второго уравнения получим, что $b = 3$, а из первого уравнения: $a = 7$. В классе – 30 учащихся, значит $d = 30 - 19 = 11$, поэтому всего троечников: $9 + 11 = 20$.

Критерии проверки.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*

"±" – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

“∓” – *в приведенных рассуждениях указано, что троечники бывают двух типов, но дальнейших продвижений нет или допущена вычислительная ошибка.*
“–” – *задача не решена или решена неверно*

5. В прямоугольнике *ABCD* на диагонали *AC* отмечена точка *K* так, что *CK* = *BC*. На стороне *BC* отмечена точка *M* так, что *KM* = *CM*. Докажите, что *AK* + *BM* = *CM*.

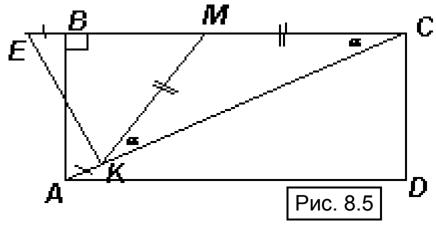

Рис. 8.5

Решение: На продолжении стороны *BC* за точку *B* отметим такую точку *E*, что *BE* = *AK*, тогда *CE* = *CB* + *BE* = *CK* + *KA* = *CA* (см. рис. 8.5).

В треугольниках *EKC* и *ABC*: *CE* = *CA*, *CK* = *CB*, угол *ECA* – общий, значит, эти треугольники равны. Следовательно, $\angle EKC = \angle ABC = 90°$.

Пусть $\angle KCM = \angle MKC = \alpha$, тогда $\angle MKE = 90° - \alpha = \angle MEK$, значит, *ME* = *MK* = *MC*.

Таким образом, *AK* + *BM* = *BE* + *BM* = *ME* = *CM*, что и требовалось.

Сделав такое же дополнительное построение, можно вместо равенства треугольников EKC и ABC доказывать равенство треугольников KBE и BKA, используя равнобедренность треугольника BCK. Существуют и другие способы решения.

Критерии проверки.
“+” – *приведено полное обоснованное решение*
“±” – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
“–” – *задача не решена или решена неверно*

6. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 2016, можно отметить так, чтобы произведение любых двух отмеченных чисел было бы точным квадратом?

Ответ: 44.

Решение. Найдем количество натуральных чисел, квадраты которых не больше, чем 2016. Таких чисел – 44, так как $44^2 = 1936 < 2016$, а $45^2 = 2025 > 2016$. Так как произведение двух точных квадратов является точным квадратом, то числа $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, …, $1936 = 44^2$ могут быть отмечены.

Докажем, что большее количество чисел отметить невозможно. Действительно, рассмотрим искомый набор чисел и разделим каждое из чисел этого набора на наибольший точный квадрат, на который оно делится. Получим новый набор чисел, причем в разложение каждого из получившихся чисел на простые множители эти множители могут входить только в первой степени. Заметим, что каждый простой множитель (если он есть) должен присутствовать во всех разложениях, так как при перемножении любых двух чисел полученного набора он должен оказаться в четной степени. Это означает, что после деления каждого числа искомого набора на наибольшие квадраты должно получиться одно и то же число *q*. Если *q* = 1, то получим набор из 44 чисел, которые сами являются точными квадратами (см. выше), а если *q* > 1, то получим набор из меньшего количества чисел, поскольку 1936*q* > 2016.

Критерии проверки.
“+” – *приведено полное обоснованное решение*
“±” – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
“∓” – *приведены только верный ответ и верный пример*
“–” – *приведен только ответ*
“–” – *задача не решена или решена неверно*