

9 класс

Первый день

- 9.1. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A *доступен* для города B , если из B можно долететь в A , возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R , для которого и P , и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.)
- 9.2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD . Окружность ω проходит через вершины B и C и вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке C , пересекает луч AD в точке Z . Докажите, что точки X , Y и Z лежат на одной прямой.
- 9.3. Сто гномов, веса которых равны $1, 2, 3, \dots, 100$ фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъемностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Могут ли все гномы переправиться на правый берег?
- 9.4. Существует ли такая бесконечная возрастающая последовательность a_1, a_2, a_3, \dots натуральных чисел, что сумма любых двух различных членов последовательности взаимно проста с суммой любых трёх различных членов последовательности?