

## 11 класс

### Первый день

- 11.1. Число  $x$  таково, что обе суммы  $S = \sin 64x + \sin 65x$  и  $C = \cos 64x + \cos 65x$  — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.
- 11.2. Остроугольный равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ) вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Лучи  $BO$  и  $CO$  пересекают стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $B'$  и  $C'$  соответственно. Через точку  $C'$  проведена прямая  $\ell$ , параллельная прямой  $AC$ . Докажите, что прямая  $\ell$  касается окружности, описанной около треугольника  $B'OC$ .
- 11.3. На доске выписаны в ряд  $n$  положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Вася хочет выписать под каждым числом  $a_i$  число  $b_i \geq a_i$  так, чтобы для любых двух из чисел  $b_1, b_2, \dots, b_n$  отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство  $b_1 b_2 \dots b_n \leq 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \dots a_n$ .
- 11.4. У фокусника и помощника есть колода с картами; одна сторона («рубашка») у всех карт одинакова, а другая окрашена в один из 2017 цветов (в колоде по 1000000 карт каждого цвета). Фокусник и помощник собираются показать следующий фокус. Фокусник выходит из зала, а зрители выкладывают на стол в ряд  $n > 1$  карт рубашками вниз. Помощник смотрит на эти карты, а затем все, кроме одной, переворачивает рубашкой вверх, не меняя их порядка. Затем входит фокусник, смотрит на стол, указывает на одну из закрытых карт и называет её цвет. При каком наименьшем  $n$  фокусник может заранее договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?