Материалы для проведения заключительного этапа

XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2016–2017 учебный год

Первый день

Калининград, 24–30 апреля 2017 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, М. П. Каленков, Д. В. Карпов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, С. И. Токарев, А. Д. Труфанов, Б. В. Трушин, М. А. Фадин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, В. З. Шарич. О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

11 класс

11.1. Число x таково, что обе суммы $S = \sin 64x + \sin 65x$ и $C = \cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны. (*Н. Агаханов*)

Решение. Заметим. что число

$$S^2 + C^2 = (\sin^2 64x + \cos^2 64x) + (\sin^2 65x + \cos^2 65x) + \\ +2(\sin 64x \sin 65x + \cos 64x \cos 65x) = \\ = 2 + 2\cos(65x - 64x) = 2 + 2\cos x$$

рационально, откуда $\cos x$ — также рациональное число. Ввиду формулы $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, все числа вида $\cos 2^k x$ также рациональны — в частности, $\cos 64x$. Поскольку C рационально, то и второе слагаемое в этой сумме также рационально.

Замечание. Слагаемые в сумме S могут оказаться иррациональными, например, при $x = 2\pi/3$.

11.2. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая ℓ, параллельная прямой AC. Докажите, что прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая AO пересекает ℓ в точке T (см. рис. 3). Из симметрии относительно AO имеем $\angle B'TO = \angle C'TO$. Поскольку $\ell \parallel AC$, получаем $\angle C'TO = \angle OAC = \angle OCA$. Итак, $\angle B'TO = \angle B'CO$, то есть T лежит на окружности ω, описанной около треугольника $B'OC$. Кроме того, из тех же соображений имеем $\angle OB'T = \angle OC'T = \angle OCA = \angle OTC'$, то есть $C'T$ касается ω в точке T.

Замечание. Можно заметить, что O и T — центры окружностей, описанных около треугольника $B'C'T$ и трапеции $BCB'C'$ соответственно.

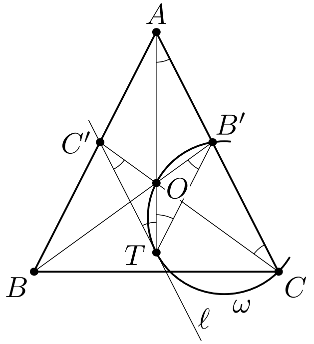

Рис. 3

11.3. На доске выписаны в ряд n положительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geqslant a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$.

(*Ф. Петров*)

Решение. Мы докажем, что существуют даже числа b_1, b_2, $\ldots$, b_n, удовлетворяющие следующим (более сильным) условиям:

(1) $b_i \geqslant a_i$ при всех $i \leqslant n$;

(2) $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$;

(3) отношение любых двух из чисел b_i является степенью двойки (с целым показателем).

Заметим, что доказываемое утверждение не изменится, если какое-то из чисел a_k (а с ним и соответствующее b_k) умножить на некоторую степень двойки. Умножим каждое из чисел a_k на степень двойки так, чтобы все полученные числа лежали в промежутке $[1, 2)$.

Не умаляя общности можно считать, что $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < 2$. Покажем теперь, что одна из следующих n последовательностей удовлетворяет всем трём условиям:

$$\begin{array}{lllllll}
a_1, & 2a_1, & 2a_1, & 2a_1, & \ldots, & 2a_1, & 2a_1; \\
a_2, & a_2, & 2a_2, & 2a_2, & \ldots, & 2a_2, & 2a_2; \\
a_3, & a_3, & a_3, & 2a_3, & \ldots, & 2a_3, & 2a_3; \\
 & & & \ldots & & & \\
a_{n-1}, & a_{n-1}, & a_{n-1}, & a_{n-1}, & \ldots, & a_{n-1}, & 2a_{n-1}; \\
a_n, & a_n, & a_n, & a_n, & \ldots, & a_n, & a_n.
\end{array}$$

Поскольку для любых k и ℓ выполнено неравенство $2a_\ell \geqslant 2 > a_k$, каждая из последовательностей удовлетворяет (1). Кроме того, каждая из последовательностей, очевидно, удовлетворяет (3). Осталось показать, что хотя бы одна из них удовлетворяет (2).

Для этого заметим, что произведение всех n^2 чисел во всех n последовательностях равно

$$2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+0} \cdot a_1^n a_2^n \ldots a_n^n = \left(2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n\right)^n.$$

Следовательно, произведение чисел хотя бы в одной из последовательностей не превосходит $2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$, что и требовалось.

11.4. У фокусника и помощника есть колода с картами; одна сторона («рубашка») у всех карт одинакова, а другая окрашена в один из 2017 цветов (в колоде по 1000000 карт каждого цвета). Фокусник и помощник собираются показать следующий фокус. Фокусник выходит из зала, а зрители выкладывают на стол в ряд $n > 1$ карт рубашками вниз. Помощник смотрит на эти карты, а затем все, кроме одной, переворачивает рубашкой вверх, не меняя их порядка. Затем входит фокусник, смотрит на стол, указывает на одну из закрытых карт и называет её цвет. При каком наименьшем n фокусник может заранее договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался? (*И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. $n = 2018$.

Решение. Положим $k = 2017$.

При $n = k + 1$ фокус устроить легко. Фокусник и помощник нумеруют цвета числами от 1 до k. Помощник, видя цвет последней, $(k+1)$-й карты (пусть его номер равен a), оставляет открытой a-ю карту. Фокусник, увидев, какая по номеру карта открыта, восстанавливает цвет последней карты.

Осталось показать, что при $n \leqslant k$ фокус не удастся. Предположим противное и рассмотрим возможные действия фокусника. Пусть, видя на i-м месте карту цвета a, он объявляет, что на j-м месте карта цвета b (тогда $i \neq j$); будем называть это *инструкцией* $(a, i) \to (b, j)$. Можно считать, что для каждой пары (a, i) существует только одна инструкция вида $(a, i) \to (b, j)$ (и фокусник при возможности всегда применяет её — поскольку никакой информации о том, какую из таких инструкций применять, у него нет). Тогда инструкций не больше, чем kn.

Будем говорить, что исходная раскладка карт *удовлетво-*

ряет инструкции $(a,i) \to (b,j)$, если в ней на i-м и j-м местах лежат карты цветов a и b соответственно. Тогда каждой инструкции удовлетворяет ровно k^{n-2} раскладок. С другой стороны, если фокус гарантированно удаётся, то каждая возможная раскладка удовлетворяет хотя бы одной инструкции — той, которую применят помощник с фокусником. Значит, общее число раскладок не может превосходить $kn \cdot k^{n-2}$, то есть $k^n \leqslant k^{n-1}n$, откуда $k \leqslant n$. Значит. $k = n$, и неравенство выше обращается в равенство. Это значит, что каждая раскладка удовлетворяет *ровно* одной инструкции, и с каждой пары (a,i) начинается *ровно* одна инструкция.

Рассмотрим произвольную инструкцию $(a,i) \to (b,j)$; тогда есть и инструкция вида $(b,j) \to (c,k)$. Поскольку не существует раскладки, удовлетворяющей обеим инструкциям, должны выполняться условия $i = k$ и $a \neq c$.

С другой стороны, для любых двух инструкций $(a,i) \to (b,j)$ и $(c,k) \to (d,\ell)$ среди номеров i, j, k, ℓ должны быть совпадающие — иначе опять же существует раскладка, удовлетворяющая обеим инструкциям. Рассмотрим граф с вершинами $1, 2, \ldots, k$, в котором i и j соединены ребром $[i,j]$, если существует инструкция вида $(a,i) \to (b,j)$ (по доказанному выше, существует также и инструкция вида $(b,j) \to (a',i)$). Тогда любые два ребра в этом графе имеют общую вершину, и из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро. Пусть для определённости $[1,2]$ — ребро этого графа. Из вершины 3 выходит ребро, имеющее общую вершину с первым — пусть для определённости это $[1,3]$. Тогда любое ребро из вершины $k > 3$ обязано иметь вид $[1,k]$, чтобы иметь общие вершины с каждым из рёбер $[1,2]$ и $[1,3]$. Наконец, любое ребро вообще должно иметь общую вершину с каждым из рёбер $[1,2]$, $[1,3]$ и $[1,4]$, то есть должно содержать вершину 1. Итак, в каждой инструкции один из номеров мест равен 1.

Наконец, сопоставим каждому месту $i > 1$ все такие цвета a, что существует инструкция вида $(c,i) \to (a,1)$. Из сказанного выше следует, что разным местам не может быть сопоставлен один и тот же цвет. Поскольку таких мест $k-1$, а цветов $k < 2(k-1)$, какому-то месту i сопоставлен только один цвет a, то есть имеются все k инструкций вида $(c,i) \to (a,1)$

при всевозможных c. Однако существует также инструкция вида $(a, 1) \to (c, i)$ для некоторого c. Но она не может существовать вместе с инструкцией $(c, i) \to (a, 1)$; противоречие.