Материалы для проведения заключительного этапа

XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2016–2017 учебный год

Второй день

Калининград, 24–30 апреля 2017 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, М. П. Каленков, Д. В. Карпов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, С. И. Токарев, А. Д. Труфанов, Б. В. Трушин, М. А. Фадин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, В. З. Шарич. О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

10 класс

10.5. На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа n, увеличенные на 1. Найдите все такие числа n, для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа m. (*Собственными делителями* натурального числа $a > 1$ называются все его натуральные делители, отличные от a и от 1.) (*А. Храбров*)

Ответ. $n = 4$ или $n = 8$.

Первое решение. Заметим, что число 2 на доску не выписано, ибо 1 — не собственный делитель n; стало быть, m нечётно. Значит, все выписанные делители m нечётны, а потому все делители n чётны. Итак, n не делится на нечётные простые числа, то есть n — степень двойки (и все его делители — тоже).

Если n делится на 16, то 4 и 8 — его собственные делители, поэтому на доску выписаны 5 и 9. Стало быть, m делится на 45 и, в частности, 15 является его собственным делителем. Но число 15 выписано быть не могло, поскольку 14 не является степенью двойки. Следовательно, n не может делиться на 16.

Оставшиеся (составные) степени двойки $n = 4$ и $n = 8$ подходят: для них можно соответственно положить $m = 9$ и $m = 15$.

Второе решение. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — все собственные делители n. Заметим, что все числа $n/a_1 > n/a_2 > \ldots > n/a_k$ — также собственные делители числа n. Значит, они соответственно совпадают с $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1$, то есть $a_i a_{k+1-i} = n$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Аналогичное рассуждение можно провести для делителей числа m.

Пусть $k \geqslant 3$. Тогда $a_1 a_k = a_2 a_{k-1} = n$ и $(a_1 + 1)(a_k + 1) = (a_2 + 1)(a_{k-1} + 1) = m$, откуда $a_1 + a_k = a_2 + a_{k-1} = m - n - 1$. Видим, что у пар чисел (a_1, a_k) и (a_2, a_{k-1}) совпадают и сумма, и произведение; по теореме Виета, они являются парами корней одного и того же квадратного уравнения, то есть эти пары должны совпадать — противоречие.

Итак, $k \leqslant 2$; это возможно, если $n = p^2$, $n = p^3$ или $n = pq$, где p и q — простые числа (в последнем случае будем считать, что $p < q$). Заметим, что p — наименьший собственный делитель n, а из условия $p+1$ — наименьший собственный делитель m, то есть $p + 1$ — простое число. Значит, $p = 2$. Случаи $n = 2^2$ и $n = 2^3$ подходят, как отмечено в первом решении. Случай же $n = 2q$ невозможен. Действительно, в этом случае у m есть лишь два собственных делителя 3 и $q + 1$, то есть $m = 3(q + 1)$, причём $q + 1$ — простое число, отличное от 3, или девятка; оба случая невозможны при простом q.

10.6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника. (*Н. Агаханов, О. Подлипский*)

Решение. Пусть, без ограничения общности, $a \geqslant b \geqslant c$; эти три положительных числа являются длинами сторон остроугольного треугольника тогда и только тогда, когда $a^2 < b^2 + c^2$. Поскольку коэффициенты $P(x)$ неотрицательны, имеем $P(a) \geqslant P(b) \geqslant P(c) > 0$; значит, нам надо проверить, что $\sqrt[n]{P(a)^2} < \sqrt[n]{P(b)^2} + \sqrt[n]{P(c)^2}$.

Пусть $P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_0$. Обозначим $G(x) = P(x)/x^n$. Заметим, что

$$G(a) = p_n + \frac{p_{n-1}}{a} + \ldots + \frac{p_0}{a^n} \leqslant p_n + \frac{p_{n-1}}{b} + \ldots + \frac{p_0}{b^n} = G(b)$$

и, аналогично, $G(a) \leqslant G(c)$. Значит,

$$\sqrt[n]{P(a)^2} = a^2\sqrt[n]{G(a)^2} < (b^2 + c^2)\sqrt[n]{G(a)^2} \leqslant$$
$$\leqslant b^2\sqrt[n]{G(b)^2} + c^2\sqrt[n]{G(c)^2} = \sqrt[n]{P(b)^2} + \sqrt[n]{P(c)^2},$$

что и требовалось доказать.

10.7. Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2. Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке. (*М. Антипов*)

Решение. Предположим противное: на доске нет ни одноцветных, ни шахматно окрашенных квадратов 2×2. Рассмотрим все отрезки сетки, разделяющие две разноцветных клетки (назовём их *разделителями*); пусть их количество равно N.

В любом квадрате 2×2 есть либо ровно одна клетка одного из цветов и три клетки другого, либо две соседних белых клетки и две соседних чёрных. В обоих случаях внутри квадрата есть ровно два разделителя. Всего квадратов 2×2 имеется 99^2, а каждый разделитель лежит внутри ровно двух из них (поскольку к границе разделители не примыкают). Значит, $N = 2\cdot(99^2)/2 = 99^2$.

С другой стороны, N должно быть чётным. Действительно, в каждой строке и каждом столбце первая и последняя клетка — чёрные; поэтому там должно быть чётное число перемен цвета. Противоречие.

Замечание 1. Вместо подсчёта количества разделителей можно считать количество разноцветных «доминошек» (прямоугольников 1×2) — это то же самое количество, либо же количество одноцветных «доминошек» — оно равно $2\cdot 100\cdot 99 - N$.

Замечание 2. Чётность общего количества разделителей можно доказать разными методами. Например, можно заметить, что если все внутренние клетки белые, то число разделителей равно $4\cdot 98$, а при любой перекраске внутренней клетки оно может измениться только на чётную величину.

Можно также заметить, что все разделители разбиваются на несколько замкнутых ломаных (в рассматриваемом случае через каждый внутренний узел проходит ровно два разделителя, так что эти ломаные даже не имеют общих вершин), а в каждой замкнутой ломаной из отрезков сетки их количество чётно (поскольку чётны количества горизонтальных и вертикальных отрезков).

10.8. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Точка B', симметричная точке B относительно прямой OI, лежит внутри угла ABI. Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника $BB'I$, проведенные в точках B' и I, пересекаются на прямой AC. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Пусть прямая BI вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке S. Пусть лучи SB' и CA пересекаются в точке T (см. рис. 2). По *лемме о трезубце* имеем $SA = SC = SI$. Из равенства $IB = IB'$ получаем $\angle IB'B = \angle IBB' = \phi$. Так как $OB = OB'$, четырёхугольник $AB'SB$ вписан, откуда $\angle SAB' = \angle SBB' = \phi$. Угол SAC — внешний для треугольника SAT, откуда $\angle ATS =$

$= \angle SAC - \angle ASB' = \angle SBC - \angle ABB' = \angle SBA - \angle ABB' = \angle SBB' = \phi$.

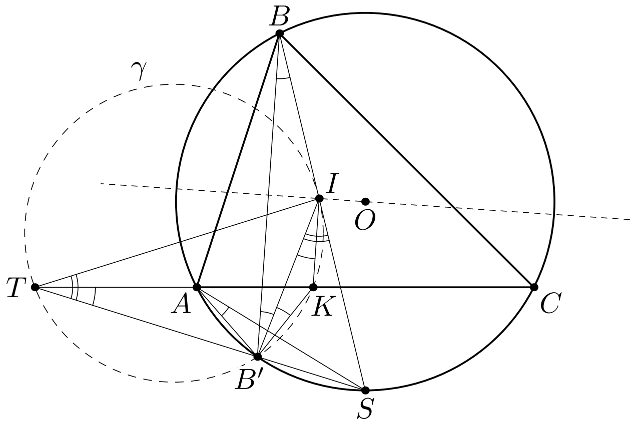

Рис. 2

Таким образом, $\angle B'AS = \phi = \angle ATS$; значит, треугольники SAB' и STA подобны по двум углам, откуда $SB' \cdot ST = SA^2 = SI^2$. Следовательно, прямая SI касается окружности γ, описанной около треугольника TIB'. Тогда $\angle ITB' = \angle B'IS$. Но угол $B'IS$ — внешний для треугольника IBB', поэтому он равен 2ϕ. Значит, $\angle ITA = \angle ITB' - \phi = 2\phi - \phi = \phi$.

Обозначим вторую точку пересечения окружности γ с прямой AC через K. Имеем $\angle KB'I = \angle KTI = \phi = \angle IB'B$. Также $\angle KIB' = \angle KTB' = \phi = \angle IBB'$. Таким образом, прямые KI и KB' касаются окружности, описанной около треугольника $BB'I$, а точка K лежит на прямой AC по построению.

Второе решение. Поскольку $OB = OB'$ из симметрии, точка B' лежит на окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Пусть лучи AI и CI вторично пересекают окружность Ω в точках A_1 и C_1 соответственно. Пусть K — точка пересечения касательных к окружности, описанной около треугольника $BB'I$, проведенных в точках B' и I; тогда $KI = KB'$. Поскольку $IB' = IB$, имеем $\angle IB'B = \angle IBB' = \angle KIB'$, откуда $KI \parallel BB'$ и $KI \perp OI$.

Пусть K' — точка, симметричная точке K относительно прямой OI, а K_1 — точка пересечения прямых KI и AC (см. рис. 3).

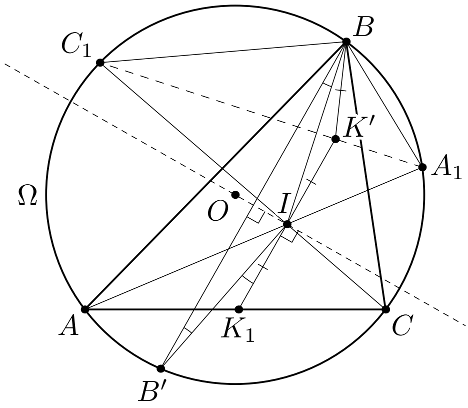

Рис. 3

Поскольку $KB' = KI$, из симметрии получаем $K'B = K'I$; кроме того, $C_1B = C_1I$ и $A_1B = A_1I$ по *лемме о трезубце*. Таким образом, точки K', A_1 и C_1 лежат на одной прямой — серединном перпендикуляре к BI. Поскольку $OI \perp K'K_1$, по *лемме о бабочке* для четырёхугольника AC_1A_1C получаем $K'I = IK_1$. Но из симметрии $K'I = IK$. Следовательно, точки K_1 и K совпадают.