

Второй тур. Задачи

Дата написания	17 апреля 2017 г.
Количество заданий	5
Сумма баллов	150
Время написания	240 минут

Не пытайтесь читать задания до объявления начала тура.

Излагайте свои мысли четко, пишите разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

Все утверждения в вашем решении должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все неизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Если не сказано иного, считайте все товары, ресурсы и активы бесконечно делимыми.

Удачи!

Для любого $x \in [0,1)$ верно, что

$$x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

Задача 6. Счастливые рисоеды

В стране Альфа производится единственный товар — рис. Собранный в конце каждого года урожай риса жители страны могут либо съесть, либо засеять на поля, чтобы в следующем году получить новый урожай. Таким образом, $Y_t = C_t + I_t$, где Y_t — собранный в году t урожай, C_t — потребление в году t , I_t — объем посева в году t (все переменные измеряются в тоннах). Засеяв I_t тонн риса в году t , в следующем году можно собрать урожай $Y_{t+1} = 80\sqrt{I_t}$.

По итогам каждого года каждая семья в стране Альфа либо счастлива, либо несчастлива. Все счастливые семьи похожи друг на друга (после сбора урожая они получают как минимум по тонне риса), каждая несчастливая семья несчастлива по-своему (такие семьи получают меньше тонны риса или не получают рис вовсе, поэтому в течение года выживают кто как может). Общее число семей в стране настолько велико, что, к сожалению, все счастливы быть не могут.

В начале 2017 года к власти в стране Альфа пришел новый президент. Срок его полномочий — 2 года, и он хочет, чтобы число семей, которые счастливы в течение всего срока его правления, было как можно бóльшим (что будет потом, его не интересует). Президент сам решает, как именно следует распределять весь выращенный рис. Президент знает, что в прошлом году было засеяно 3600 тонн риса.

а) (15 баллов) Какое количество риса следует засеять в 2017 и 2018 годах для достижения цели президента? Сколько семей при этом будет счастливо в каждый из двух указанных годов? Сколько семей в этом случае будет счастливо в 2019 году?

б) (15 баллов) Представим теперь, что президент задумался о вечном. Какое максимальное количество семей может быть счастливо в экономике страны Альфа на протяжении бесконечно долгого периода времени (то есть начиная с 2017 года и навсегда)? Сколько риса для достижения этой цели следует сеять каждый год?

Задача 7. В чём согласны экономисты — 2

Продолжим обсуждать исследование Дэна Фуллера и Дорис Гейде-Стивенсон¹, которое упоминалось в задаче 2 первого тура олимпиады.

Ниже приводятся два утверждения, которые находятся соответственно на третьем и четвертом местах по количеству экономистов, которые оказались в той или иной степени согласны с ними. (В скобках указана доля опрошенных, выразивших полное согласие и согласие с оговорками соответственно.) Прокомментируйте каждое из этих утверждений: объясните, почему многим экономистам оно кажется справедливым, а также почему, тем не менее, не все согласны с ним безоговорочно. Будьте лаконичны: ответ относительно каждого утверждения может уместиться в 3—5 предложений.

¹Fuller, Dan, and Doris Geide-Stevenson. "Consensus Among Economists—An Update." *The Journal of Economic Education* 45.2 (2014): 131-146.

а) (15 баллов) Регулировать загрязнение окружающей среды с помощью налогов и торгуемых разрешений на выбросы более эффективно, чем устанавливать жесткие ограничения выбросов (58,5 % + 29,1 %).

б) (15 баллов) Государство должно жестко следить за соблюдением антимонопольных законов (55,8 % + 31 %).

Задача 8. Как построить стадион

По случаю Чемпионата мира 2018 года футбольный клуб «Забивака» решил построить новый стадион вместо того, на котором он играет сейчас. Спрос на посещение матчей предъявляют две группы болельщиков — фанаты клуба и просто ценители красивой игры. Фанаты предъявляют спрос при любой игре команды; их функция спроса имеет вид $q_1(p) = 60 - p$, где p — цена абонеента на посещение матчей в течение сезона, q_1 — количество купленных абонементов. Ценители красивой игры предъявляют спрос на абонементы, только если клуб играл красиво в предыдущем сезоне. Красота игры определяется случайными факторами; вероятность красивой игры равна $1/2$. Функция спроса второй группы имеет вид $q_2(p) = 100 - p$.

Издержки на строительство стадиона вместимости x равны $C = 5000 + 100x$. Клуб принимает решение о вместимости стадиона и тратит деньги на его строительство в начале периода $t = 0$ (в будущем достраивать стадион нельзя), а получает выручку от продажи билетов в начале каждого периода $t = 1, 2, \dots$ (до бесконечности). Клуб максимизирует ожидаемую приведенную стоимость денежного потока, то есть величину

$$-C + \frac{0,5TR_1 + 0,5TR_{1+2}}{1+r} + \frac{0,5TR_1 + 0,5TR_{1+2}}{(1+r)^2} + \frac{0,5TR_1 + 0,5TR_{1+2}}{(1+r)^3} + \dots,$$

где TR_1 — выручка от продажи абонементов только фанатам, TR_{1+2} — выручка от продажи билетов как фанатам, так и ценителям красивой игры. Множители 0,5 присутствуют в силу того, что каждый из двух случаев реализуется с вероятностью $1/2$. Ставка процента r равна 10 %. Клуб принимает решение о ценах в начале каждого периода, когда уже известно, будут предъявлять спрос ценители красивой игры или нет.

а) (15 баллов) Предположим, что фанаты любят смотреть матч только из-за ворот, а ценители красивой игры — только с центральной трибуны. Клуб может построить каждую трибуну любой вместимости, а потом назначать разные цены на билеты на разные трибуны. Определите оптимальные цены на билеты абонементов на разные трибуны (на центральную трибуну — только для случая, когда на нее есть спрос) и оптимальную вместимость каждой трибуны.

б) (15 баллов) Предположим, что клуб решает ту же задачу при условии, что любому зрителю безразлично, откуда смотреть матч, и поэтому проводить ценовую дискриминацию между фанатами и остальными болельщиками не получится. Клуб назначает единую цену для всех мест на стадионе. Найдите оптимальную цену абонеента (в зависимости от того, предъявляет спрос вторая группа или нет), и оптимальную вместимость стадиона.

Задача 9. Краудфандинг

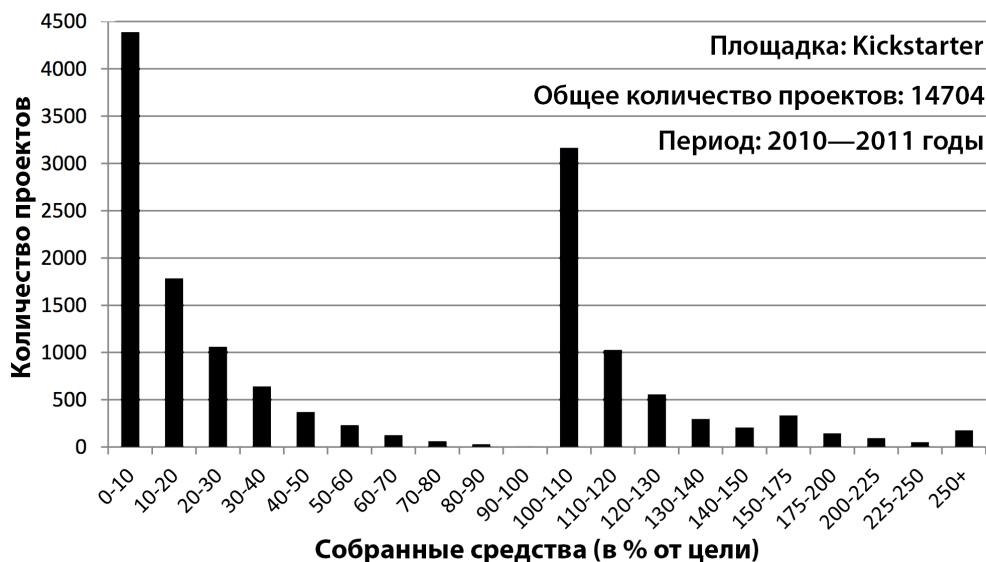
Краудфандинг (дословный перевод — «финансирование толпой») — способ финансирования проектов, который приобрел широкую популярность в последнее время. С помощью краудфандинга артисты записывают музыкальные альбомы, начинающие предприниматели привлекают инвестиции для своих стартапов, политики финансируют свои избирательные кампании.

Одной из самых известных площадок для организации краудфандинга является Kickstarter (<http://www.kickstarter.com>). Зайдя на сайт, потенциальные инвесторы могут изучить и профинансировать проекты, которые там разместили их авторы.

Сначала автор проекта объявляет сбор средств, принять участие в котором может каждый желающий. Сумма средств, собранная к текущему моменту, всегда видна на странице проекта. Если определенную заранее сумму удастся собрать к некоторому заранее объявленному сроку, проект реализуется. Тогда те, кто вложил деньги, обычно получают небольшой бонус (например, возможность купить произведенный товар со скидкой или получить бесплатную открытку с подписью политика, чья избирательная кампания была профинансирована). Если необходимая сумма за отведенное время не собрана, все пожертвованные деньги возвращаются.

а) (6 баллов) Предположим, что предприниматель задумал осуществить проект и ищет финансирование. Казалось бы, краудфандинг — самый простой способ получить деньги. Тем не менее, далеко не все прибегают к нему. Объясните, почему предприниматель может отказаться от краудфандинга в пользу других способов привлечения денег.

б) (12 баллов) На графике показано, сколько проектов получили различные объемы финансирования в процентах от заявленной цели². Большинство проваленных проектов недобрали существенную часть необходимой суммы, а успешные проекты чаще всего лишь ненамного переходили этот порог. Объясните, почему график может иметь такой вид.



²Источник: Kuppuswamy, V., Bayus, B. L. (2015). Crowdfunding creative ideas: The dynamics of project backers in Kickstarter. UNC Kenan-Flagler Research Paper No. 2013-15.

в) (5 баллов) Есть данные, что при прочих равных условиях проект, в описании которого допущена орфографическая ошибка, имеет меньше шансов на сбор необходимой суммы. Как можно объяснить такую закономерность?

г) (7 баллов) Динамика поступления платежей обычно имеет форму буквы U: в первую и последнюю неделю средства жертвуются активнее. Как можно объяснить такую закономерность?

Задача 10. Правила приема

Во многих странах абитуриенты распределяются по вузам и факультетам с помощью централизованных алгоритмов. Рассмотрим один из них.

Допустим, есть m абитуриентов и n факультетов. На факультете с номером i есть q_i мест, суммарное количество мест на всех факультетах не меньше m . Каждый абитуриент подает для обработки компьютерной программой информацию о том, какой факультет является для него первым по предпочтительности, вторым по предпочтительности, и т. д. до последнего. Затем программа на основе этой информации определяет, на какой факультет пойдет каждый абитуриент, с помощью следующей процедуры:

Шаг 1. Каждый абитуриент рассматривается как кандидат на наилучший для себя (согласно поданным предпочтениям) факультет. Если на факультете достаточно мест, чтобы принять всех таких кандидатов, то он принимает их всех. Если мест на факультете i недостаточно, то он принимает q_i абитуриентов из числа кандидатов согласно некоторым общеизвестным правилам, которые могут быть разными для разных факультетов. (Например, факультет может быть обязан принимать абитуриентов с наибольшим суммарным баллом ЕГЭ, при равенстве баллов обязан сравнивать абитуриентов по неким другим четко прописанным критериям и т. д.)

Последующие шаги. На каждом последующем шаге каждый абитуриент, отвергнутый на предыдущем шаге, рассматривается как кандидат на наиболее предпочтительный для себя факультет из числа факультетов, на которые он еще не был кандидатом и где еще остались места. Если на факультете достаточно оставшихся мест, чтобы принять всех таких кандидатов, то он принимает их всех. Если мест на факультете недостаточно, то он заполняет оставшиеся места согласно общеизвестным правилам.

Поскольку суммарное количество мест на всех факультетах не меньше, чем общее количество абитуриентов, на каком-то шаге все абитуриенты будут распределены по факультетам. Тогда работа программы заканчивается.

Анализируя работу этого алгоритма, экономисты заметили, что абитуриентам может быть выгодно исказить информацию о своих истинных предпочтениях. Рассмотрим эту проблему на следующем «игрушечном» примере.

Предположим, есть три факультета, a , b и c , в каждом по одному месту, и три абитуриента — Петя, Юля и Надя. Предпочтения Пети и Юли относительно факультетов выглядят как $a > b > c$ (a лучше, чем b , a лучше, чем c), предпочтения Нади как

$b > c > a$. Каждый факультет обязан выбирать абитуриентов с наибольшим количеством баллов на заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников, причем общеизвестно, что балл Пети больше балла Юли, а тот, в свою очередь, больше, чем балл Нади.

а) (5 баллов) Найдите распределение абитуриентов по факультетам, которое реализуется в результате работы алгоритма, описанного выше, если абитуриенты честно сообщат свои предпочтения.

б) (5 баллов) Докажите, что одному из трех абитуриентов выгодно солгать, то есть сообщить алгоритму предпочтения, отличающиеся от его истинных (при условии, что другие два абитуриента будут сообщать свои истинные предпочтения).

в) (8 баллов) Считается, что возникновение у абитуриентов стимулов исказить информацию о предпочтениях — проблема. Какие издержки (потери экономической эффективности) могут быть вызваны возникновением таких стимулов?

г) (12 баллов) Вернемся к общему случаю с n факультетами и m абитуриентами. Будем говорить, что некий алгоритм распределения *устраняет обоснованную зависть*, если он всегда производит распределение абитуриентов по факультетам, обладающее следующим свойством: не существует такой пары абитуриентов, что (1) первый абитуриент предпочитает факультет, куда попал второй, своему факультету; (2) первый абитуриент лучше второго с точки зрения правил приема на факультет второго.

Допустим, по закону все факультеты упорядочивают абитуриентов одинаково. Придумайте алгоритм распределения абитуриентов по факультетам, который одновременно устраняет как обоснованную зависть, так и стимулы лгать о своих предпочтениях (никакой абитуриент не сможет, солгав, попасть на более предпочтительный для себя факультет, каковы бы ни были предпочтения, сообщенные алгоритму другими абитуриентами). Докажите, что для вашего алгоритма в общем случае выполняются указанные свойства и проиллюстрируйте его работу на примере с Петей, Юлей и Надей.