IX/X.3 ПЛАНЕТНОЕ ТРИО

О.С. Угольников

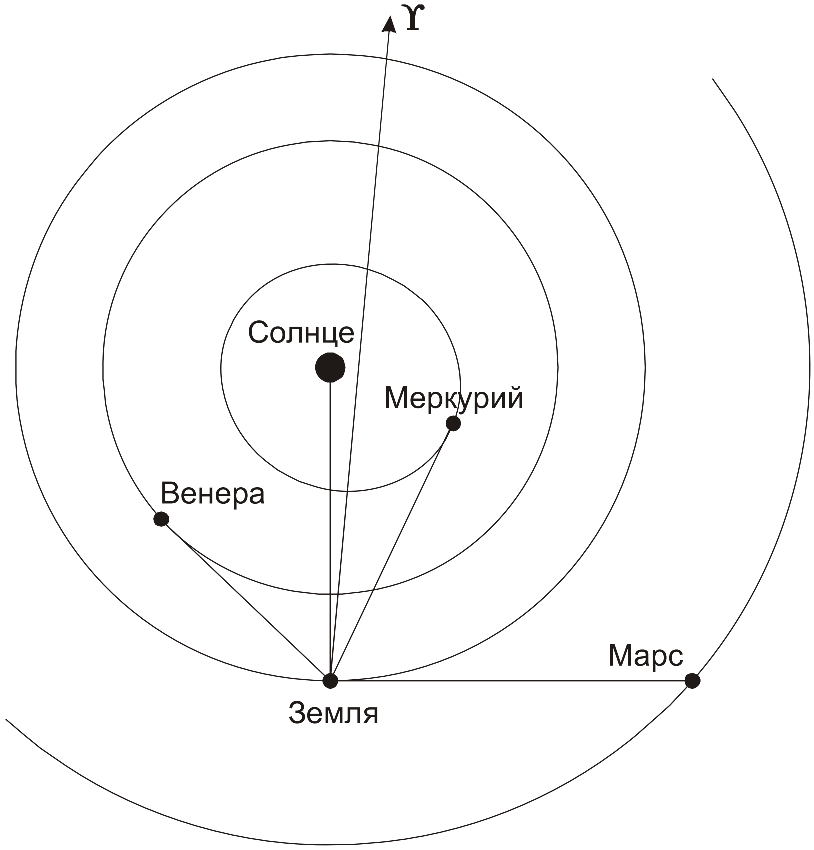
Условие. В таблице приведены экваториальные координаты Меркурия, Венеры и Марса на Земле в некоторый момент времени. Считая орбиту Марса круговой, определите его угловой диаметр в этот момент.

Планета	Прямое восхождение, α	Склонение, δ
Меркурий	22ч33.2м	–10° 27′
Венера	03ч06.0м	+20° 34′
Марс	18ч15.7м	–23° 32′

Решение. Казалось бы, задачу нельзя решить, не зная текущую конфигурацию Марса, зависящую от неизвестного положения Солнца. Однако мы можем подметить интересную особенность – внутренние планеты, Меркурий и Венера, располагаются необычно далеко друг от друга. Они находятся вблизи эклиптики по разные стороны от экватора, и угловое расстояние между ними можно найти по теореме Пифагора:

$$\lambda_{MV} = \sqrt{(\alpha_V - \alpha_M)^2 + (\delta_V - \delta_M)^2} = 75^O.$$

Здесь прямое восхождение Меркурия α_M уменьшено на 24 часа. Угловое расстояние между планетами равно сумме их максимальных элонгаций от Солнца: 28° для Меркурия и 47° для Венеры. Такое может быть, только если одновременно наступила наибольшая западная элонгация Меркурия (28°) и наибольшая восточная элонгация Венеры (47°). В этом случае мы можем найти положение Солнца на небе достаточно простым образом:



$$\alpha_0 = \alpha_M + \frac{28}{75}(\alpha_V - \alpha_M) = 0ч\,15м;$$

$$\delta_0 = \delta_M + \frac{28}{75}(\delta_V - \delta_M) = +0^O 45'.$$

Планеты не находятся точно на эклиптике, сделанные расчеты приближенные, поэтому положение Солнца также не попало точно на эклиптику. Главный вывод, который можно сделать по прямому восхождению Солнца – оно находится в 90° к востоку от Марса, и последний находится в западной квадратуре. Считая его орбиту круговой (орбита Земли тоже близка к окружности), определяем угловой диаметр планеты:

$$d = \frac{D}{\sqrt{a^2 - a_0^2}} = 4 \cdot 10^{-5}\ рад = 8''.$$

Здесь a и a_0 – радиусы орбит Марса и Земли, D – физический диаметр Марса.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение углового расстояния между Меркурием и Венерой. Это можно делать как точно, так и приближенно, проецируя участок небесной сферы на плоскость.
2 этап: 2 балла.
Вывод о том, что Меркурий и Венера находятся в противоположных наибольших элонгациях.
3 этап: 1 балл.
Определение положения Солнца на небе (приближенно) в данный момент.
4 этап: 1 балл.
Вывод о квадратуре Марса либо вычисление его углового расстояния от Солнца.
5 этап: 2 балла.
Вычисление углового диаметра Марса.

Если участник сразу необоснованно пишет, что Марс располагается в квадратуре, то засчитаны могут быть только 4 и 5 этапы, и наибольшая оценка за все решение не может быть больше 3 баллов.

Возможный альтернативный подход к решению: участник олимпиады может определить диапазон возможных угловых расстояний Марса от Солнца, исходя из углового расстояния между Марсом и Меркурием, а потом провести такой же анализ, исходя из углового расстояния между Марсом и Венерой. Пересечение этих интервалов дает узкое множество возможных значений углового расстояния между Марсом и Солнцем около 90°. При условии верного выполнения такое решение засчитывается в полной мере.

Возможная ошибка при решении: максимальная элонгация Меркурия определяется в предположении его круговой орбиты и составляет 23°. Из этого делается вывод, что Меркурий и Венера не могут быть так далеко на небе друг от друга, и задание решения не имеет. В этом случае выставляется только 2 балла за первый этап решения.

IX/X.6 К НОВЫМ ГОРИЗОНТАМ

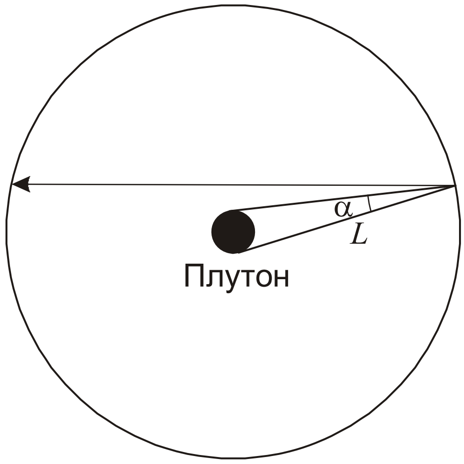
С.Г. Желтоухов

Условие. Когда межпланетная станция New Horizons пролетала около Плутона (радиус 1190 км) на расстоянии 33 а.е. от Солнца, угловой диаметр Плутона был больше одного градуса всего около 5 часов. В середине этого интервала угловой диаметр Плутона достиг 10°. Сможет ли эта межпланетная станция вылететь из Солнечной системы? Оцените, за какое время станция долетит до орбиты тела 2014 MU69, если радиус этой орбиты равен 44 астрономическим единицам. Орбиту этого тела можно считать круговой.

Решение. Определим расстояние L, с которого Плутон виден как диск с угловым диаметром α:

$$L = \frac{2R}{sin\alpha} = 135000 \text{ км.}$$

Если считать траекторию аппарата около Плутона прямой, проходящей вблизи Плутона (на это указывает большой угловой диаметр в середине интервала), а его скорость v – постоянной, то она будет равна $2L/t$ = 54000 км/ч или 15 км/с. Это существенно больше второй космической скорости даже на поверхности Плутона. Поэтому мы можем считать, что притяжение самого Плутона не оказало существенного влияния на скорость аппарата.



Сравним теперь полученную скорость (относительно Плутона) со скоростью движения по параболической орбите на таком расстоянии от Солнца a_1 (выраженном в астрономических единицах):

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{2}{a_1}} = 7.3 \text{ км/с}.$$

Здесь v_0 – круговая скорость на орбите Земли. Полученная скорость вдвое меньше скорости "Новых Горизонтов". Вне зависимости от направления движения относительно Плутона гелиоцентрическая скорость аппарата больше второй космической, и он может покинуть Солнечную систему.

Обратим внимание, что аппарат, имея столь высокую скорость, прилетел из внутренних областей Солнечной системы, с Земли. Следовательно, аппарат движется вблизи Плутона в направлении, близком к радиальному (от Солнца), перпендикулярно движению самого Плутона. Его гелиоцентрическая скорость мало отличается от плутоно-центрической и близка к v. Движение от Плутона к астероиду 2014 MU69 будет происходить по прямой линии с практически постоянной скоростью. Это займет время

$$t = \frac{a_2 - a_1}{v} = 3.5 \text{ года}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение расстояния, с которого Плутон имеет заданные угловые размеры.
2 этап: 2 балла.
Определение скорости аппарата относительно Плутона. В случае ошибки в 2 раза, вызванной путаницей радиусов и диаметров, эти 2 балла не выставляются, но дальнейшее решение оценивается в полной мере. Предположение, что аппарат летел по хорде в случае правильного вычисления длины хорды оценивается в полной мере.
3 этап: 1 балл.
Вывод о том, что аппарат сможет покинуть Солнечную систему.
4 этап: 1 балл.
Вывод о радиальном направлении скорости аппарата. Если этот вывод не делается, то данный балл не выставляется даже при последующем верном решении.
5 этап: 2 балла.
Расчет времени перелета аппарата к астероиду 2014 MU69.

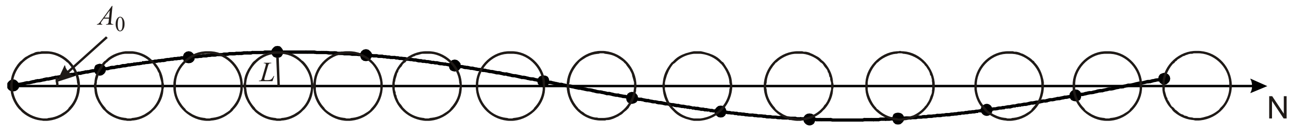
X.1 ПУТЕВОДНАЯ ЗВЕЗДА

О.С. Угольников

Условие. Океанский корабль движется в сторону севера, пересекая параллель +60° с.ш. Капитан корабля держит курс точно на Полярную звезду, забыв о том, что она не находится точно в Северном полюсе мира (склонение звезды на текущую эпоху +89°20′). Каково максимальное смещение корабля (в км) от прямолинейного курса (меридиана), если его скорость равна 30 км/ч? Считать, что оптические приборы на борту позволяют видеть Полярную звезду даже днем.

Решение. Полярная звезда не находится точно в Северном полюсе мира и описывает вокруг него суточный круг с радиусом ρ, равным 40′. Центр этого круга располагается на высоте φ=60°, на альмукантарате с длиной, вдвое меньшей горизонта (большого круга небесной сферы). Поэтому азимут Полярной звезды изменяется практически синусоидально с периодом в звездные сутки T и амплитудой A_0 (отклонением от севера) в $\rho/\cos\varphi$ = 80′. В момент, когда азимут отличается от северного на эту величину, у скорости корабля появляется компонента, направленная вдоль параллели, и равная

$$v_P = v \sin A_0 = 0.70 \text{ км/ч}.$$



Здесь v – полная скорость корабля. Он идет по синусоиде, и этот путь можно представить как наложение прямолинейного и слегка неравномерного движения на север и вращения по кругу со скоростью v_P и периодом T. Максимальное отклонение корабля от курса есть радиус этого круга:

$$L = \frac{v_P T}{2\pi} = \frac{v \sin A_0 T}{2\pi} \approx \frac{v\rho T}{2\pi \cos\varphi} = 2.7 \text{ км}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

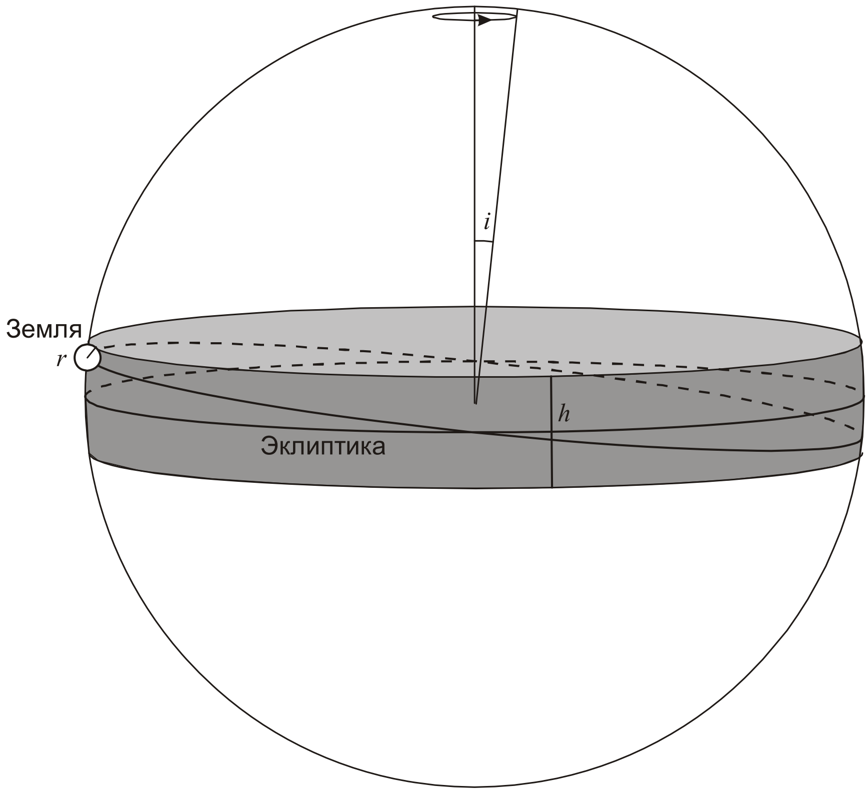
1 этап: 3 балла.
Определение максимального отклонения азимута Полярной звезды от направления на север. Это оценивается в 3 балла. Если при этом не учитывается фактор cos φ с итоговой ошибкой в 2 раза, данные 3 балла не выставляются, но оставшееся решение оценивается в полной мере.
2 этап: 2 балла.
Определение максимальной величины компоненты скорости корабля перпендикулярно меридиану.
3 этап: 3 балла.
Вычисление максимального отклонения от прямолинейного курса. Второй и третий этапы могут выполняться вместе без промежуточных численных выводов. Может использоваться как «модель круга», так и прямой анализ синусоидального движения.

X.2 ЛУННЫЙ ЗВЕЗДНЫЙ КАТАЛОГ

О.С. Угольников

Условие. На стационарной лунной обсерватории будущего проводится изучение атмосферы Земли на основе спектроскопии звезд у земного лимба. Для этой цели создан каталог звезд ярче 6^m, которые могут покрываться Землей при наблюдении из этой обсерватории. Оцените количество звезд в этом каталоге.

Решение. Перечислим все факторы, которые будут влиять на размер области неба, которая может быть покрыта Землей при наблюдении с лунной обсерватории. Земля имеет значительный угловой размер (максимально возможный радиус *r* около 1.02°) и движется относительно звезд вдоль линии пересечения небесной сферы и плоскости орбиты системы Земля-Луна. Ось этой линии наклонена на угол *i* (5.15°) к оси эклиптики и вращается вокруг нее с периодом 18.6 лет. Таким образом, Земля в своем движении заметает пояс вдоль эклиптики шириной



$$h = 2\,(i + r) \sim 12.3°.$$

Мы не учитываем здесь параллактический сдвиг Земли, зависящий от положения точки на Луне, так как за счет синхронного осевого вращения Луны этот сдвиг будет почти постоянным и приведет только к смещению серой области на рисунке как единого целого. Влияние лунных либраций будет исчисляться несколькими сотыми градуса, что можно не учитывать. Если лунная обсерватория установлена вдали от полюсов, то в разные моменты времени с нее будут доступны все участки области небесной сферы, которые могут быть покрыты Землей. Определим отношение площади данной области и всего неба:

$$\eta = \frac{2\pi R^2 h}{4\pi R^2} = \frac{h}{2} \approx 0.107.$$

Если считать, что 6000 звезд ярче 6^m распределены по небесной сфере равномерно (это можно делать, так как эклиптика образует большой угол с Млечным путем), то в данный каталог должно войти около 650 звезд.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 5 баллов.
Указание факторов, определяющих размер области неба, покрываемой Землей: прецессии плоскости орбиты системы Земля-Луна ($2i$ = 11.3°, 3 балла) и видимые размеры Земли ($2r$ = 2.0°, максимальные или средние, 2 балла). Не-учет фактора 2 на каждом из этапов уменьшает оценку на 1 балл. Если вместо угла (i+r) участники берут близкую величину либрации Луны по широте (около 7°), оценка уменьшается на 2 балла, так как на либрацию влияет также наклон оси вращения Луны к плоскости ее орбиты, а на покрытиях звезд он не сказывается. Если участники олимпиады дополнительно учитывают параллактическое смещение Земли за счет либраций (2*0.03°) – это не изменяет оценку, если же они берут полный параллакс (2*0.25°) – оценка уменьшается на 2 балла, так как при наблюдении из фиксированной точки Луны параллактическое смещение Земли практически постоянно. Неточности, допущенные на первом этапе, не являются основанием для снижения оценки на последующих этапах, если там не сделаны дополнительные ошибки.
2 этап: 2 балла.
Определение доли небесной сферы, где могут происходить покрытия. Эту долю участники могут считать как цилиндром, так и фрагментом сферы.
3 этап: 1 балл.
Определение числа звезд в каталоге. Необходимо принимать во внимание, что это лишь примерная оценка, участники могут брать несколько различающиеся значения общего числа ярких звезд на небе (5500-6500).

X.4 ЗВЕЗДА В ЗЕНИТЕ

О.С. Угольников

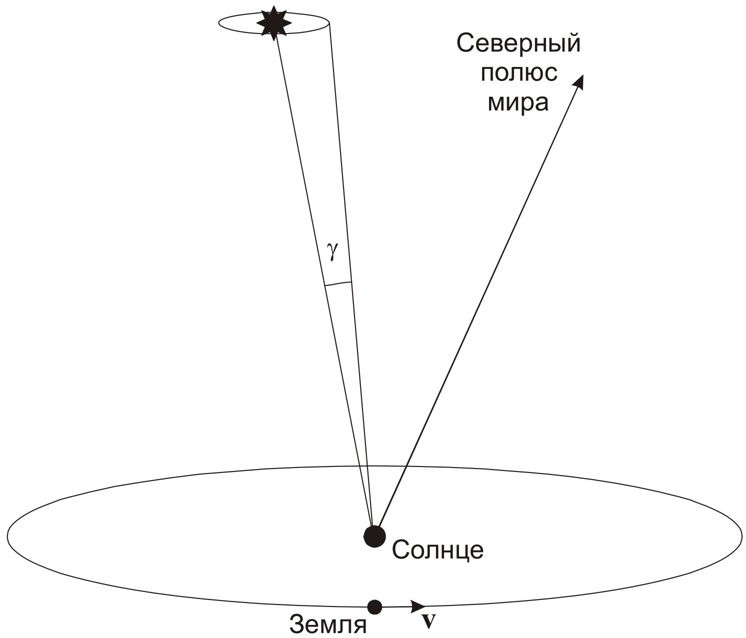
Условие. В какой сезон и в какое местное (среднее солнечное) время звезда Грумиум (ξ Дракона) может оказаться точно в зените в точке России с координатами 56°52′00″ с.ш., 30°00′00″ в.д.? Склонение звезды на эпоху 2017 года равно +56°52′13″, прямое восхождение считать равным точно 18ч. Эксцентриситетом орбиты Земли, уравнением времени, прецессией, нутацией, параллаксом и собственным движением звезды пренебречь.

Решение. Мы видим, что склонение звезды немного отличается от широты места наблюдения. Тем не менее, звезда может попасть в зенит, так как ее положение на небе смещается за счет аберрации света – явление, вызванного орбитальным движением Земли. Аберрационное смещение звезды направлено к точке неба, к которой движется Земля в настоящий момент. В общем случае (вообще говоря, не требующемся для решения данной задачи) величина аберрационного смещения в радианах равна

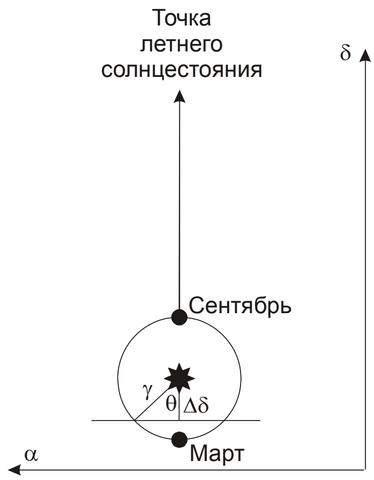
$$\gamma = v \sin\theta / c,$$

где v – орбитальная скорость Земли, c – скорость света, θ – угол между скоростью и направлением на звезду. Величина аберрации максимальна, когда движение нашей планеты происходит перпендикулярно направлению на звезду. Для указанной в условии задачи звезды Грумиум близкая к этому ситуация наблюдается постоянно, так как эта звезда располагается недалеко от северного полюса эклиптики (прямое восхождение 18ч, склонение +66.6°), угол θ всегда не меньше 80°, а его синус – не меньше 0.985. В этом случае звезда описывает на небе за год круг, а величина аберрации составляет

$$\gamma = v/c = 10^{-4} \text{ рад} \sim 20''.$$



В день осеннего равноденствия, когда орбитальная скорость Земли направлена вдоль плоскости меридиана в направлении точки летнего солнцестояния (рисунок), аберрационное смещение направлено на север. В день весеннего равноденствия видимое положение звезды смещается на юг. Склонение звезды на Δδ=13″ больше широты места наблюдения, и аберрация должна сместить ее на юг на эту величину.



Из рисунка видно, что условие задачи будет выполнено, если положение звезды на круге аберрации (и Земли на орбите) будет отстоять от положения, соответствующего весеннему равноденствию, на угол

$$\theta = \arccos\frac{\Delta\delta}{\gamma} \approx 50^{\circ} = 3\text{ч}20\text{м}.$$

Это происходит примерно за 51 день до и после весеннего равноденствия, то есть около 30 января и 10 мая. Если пренебречь уравнением времени, то звездное время в среднюю полночь S в эти дни равно 180 ± 50° или 12ч ± 3ч20м (январю соответствует знак "–", маю – знак "+"). Местное время верхней кульминации данной звезды в зените соответствует звездному времени, равному ее прямому восхождению α (его изменением за счет аберрации мы пренебрегаем) и равно

$$T = \alpha - S = 9\text{м}20\text{м или } 2\text{ч}40\text{м}.$$

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 1 балл.
Указание аберрации света как причины изменения видимых экваториальных координат звезды.
2 этап: 1 балл.
Правильное указание величины аберрационного смещения звезды как известного, либо его получение на основе значения орбитальной скорости Земли.
3 этап: 2 балла.
Правильное указание направления сдвига звезды за счет аберрации в разные сезоны года, описанное явно или следующее из решения. Если направление отличается от правильного на значительный угол (90°, 180°), за 3 этап выставляется 0 баллов, но последующие этапы оцениваются в полной мере при условии их корректного выполнения.
4 этап: 2 балла.
Указание двух сезонов (каждый – по 1 баллу), в которые возможна кульминация звезды в зените. Учет изменения прямого восхождения звезды за счет аберрации на оценку не влияет.
5 этап: 2 балла.
Определение местного времени кульминации звезды в каждый из этих сезонов (по 1 баллу).

Возможная ошибка при решении: игнорирование явлением аберрации и вывод, что звезда в зенит не попадает. Оценка в этом случае составляет 1 балл.

X/XI.5 ОСКОЛКИ ЛУНЫ

Е.Н. Фадеев, О.С. Угольников

Условие. Враждебные инопланетяне разрушили Луну, превратив ее в огромное количество шарообразных осколков диаметром 10 м. Все эти тела стали двигаться, равномерно заполнив пространство вокруг Земли между сферами размером с перигей и апогей лунной орбиты. Оцените концентрацию этих осколков и звездную величину всей полусферы ночного неба на Земле. Влиянием земной атмосферы пренебречь. Считать все осколки одинаковыми, а их плотность и оптические свойства аналогичными самой Луне.

Решение. Ответим сначала на первый вопрос задачи. Пусть R – радиус Луны (1738 км), а r – радиус осколка (5 м). Объем Луны составляет $(4/3)\pi R^3$, Объем осколка – $(4/3)\pi r^3$. Поскольку объем всех осколков равен объему Луны, полное число этих тел равно

$$N = (R/r)^3 = 4.2\cdot 10^{16}.$$

Пространство, заполненное осколками, представляет собой сферический слой со средним радиусом D (среднее расстояние от Земли до Луны) и толщиной $2De$ (e - эксцентриситет орбиты Луны), толщина существенно меньше радиуса. Объем этой области равен

$$V = 4\pi D^2\cdot 2De = 8\pi D^3 e = 7.8\cdot 10^{16}\ \text{км}^3.$$

Концентрация осколков $n=N/V\sim 0.55$ км$^{-3}$. Если мы возьмем предельные значения расстояния Луны в перигее и апогее из справочных данных, то мы получим несколько большее значение объема ($9.2\cdot10^{16}$ км^3) и концентрации (0.45 км$^{-3}$).

Теперь нужно выяснить, какую яркость ночного неба будут создавать эти осколки. Казалось бы, мы можем достаточно просто решить эту задачу, определив яркость каждого осколка и умножив ее на число осколков видимых на небе. Луна и все осколки находятся на примерно одинаковом расстоянии от наблюдателя. Обозначив яркость Луны как J_0, получаем, что яркость одного осколка есть

$$j = Jr^2/R^2.$$

Из любой точки Земли будет видна примерно половина всех осколков. Их суммарная яркость составит

$$J = (N/2)\, j = JR/2r.$$

Соответствующая звездная величина будет равна

$$m = m_0 - 2.5 \lg (JR / 2r) = m_0 - 13.1.$$

Сам по себе этот ответ уже вызывает удивление: небо оказывается очень ярким. Действительно, среднюю звездную величину Луны можно взять для фазы, близкой к первой или последней четверти, а можно определить, зная ее сферическое альбедо A:

$$m_0 = M_0 - 2.5\lg\frac{\pi R^2 A}{4\pi D^2} = M_0 - 2.5\lg\frac{R^2 A}{4D^2} = M_0 + 16.1 = -10.6.$$

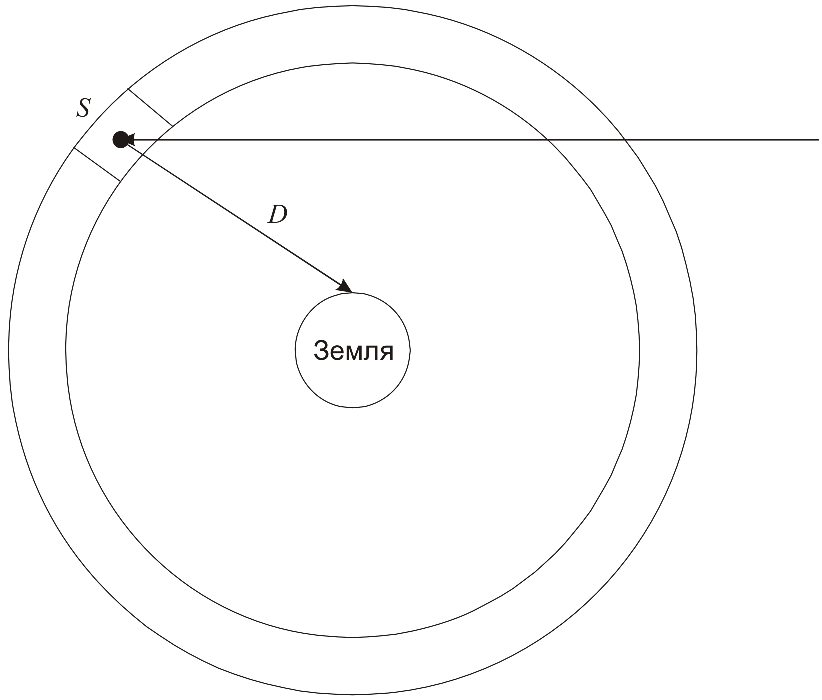
Выходит, что при сферическом альбедо 0.07 небо должно иметь величину -23.7^m, то есть всего на 3^m или в 16 раз слабее Солнца! Мысленно предположив большее альбедо (порядка единицы) и возможность наблюдения всей сферы из осколков, мы получим, что они светили бы ярче Солнца, чего не может быть (в реальности, даже при альбедо, равном единице, вся равномерно рассеивающая сфера не может светить ярче 1/4 от яркости Солнца).

Причина противоречия в том, что мы не учли высокую оптическую плотность слоя осколков. Умножим площадь, на которой осколок задерживает излучение (πr^2) на число осколков (R^3/r^3), и разделим это на площадь всей сферы:

$$\tau = \frac{\pi r^2 R^3}{r^3 4\pi D^2} = \frac{R^3}{4rD^2} = 1.8.$$

Полученная величина есть среднее количество осколков на пути луча, идущего перпендикулярно к слою (фактически, его оптическая толщина). Даже в этом случае осколки будут в заметной степени затенять друг друга. С другой стороны, коль скоро это число порядка единицы, значительное число света будет рассеиваться осколками и попадать к наблюдателю.

Точный расчет яркости сферы представляет собой достаточно сложную задачу, однако это можно сделать приближенно. Приведем один из наиболее простых и при этом эффективных способов. Рассмотрим одну из возможных траекторий луча света от Солнца к какому-либо осколку и далее к Земле.



Путь луча до осколка может быть разным, он может проходить через слой один или два раза с существенно разной длиной. Так как нас интересует полная яркость небесной полусферы, будем считать, что каждый равный элемент площади сферы S рассеивает одинаковое количество солнечного излучения. Будем считать, что вся солнечная энергия, попадающая на сферу, задерживается или рассеивается в ней (оптическая толщина по диаметру не менее 3.6, по хорде – еще больше). Сфера площадью $4\pi D^2$ за единицу времени задерживает $\pi D^2 \cdot J_0$ солнечной энергии (J_0 – плотность потока солнечного излучения на расстоянии Земли). 7% этой энергии рассеивается в окружающее пространство. Плотность потока энергии от элемента сферы с площадью S на Земле будет равна

$$j_S = J_0 \pi D^2 \frac{S}{4\pi D^2} \cdot \frac{A}{4\pi D^2} \cdot e^{-\tau/2}.$$

Последний множитель выражает ослабление излучения в сфере уже после рассеяния, средний путь через сферу при этом равен половине ее толщины. Суммируя все элементы с площадью S по полусфере, получаем общую плотность потока излучения от нее на Земле:

$$j = j_S \cdot \frac{2\pi D^2}{S} = J_0 \frac{A}{8} e^{-\tau/2}.$$

Переведем это в звездные величины:

$$m = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{A}{8} e^{-\tau/2}\right) = M_0 - 2.5\lg\left(\frac{A}{8}\right) + \frac{1.08\tau}{2} = M_0 + 6.1 = -20.7.$$

Несмотря на большую оптическую плотность сферы, небо все равно остается достаточно ярким. Конечно, здесь мы не учли, что эта яркость будет существенно меньше в областях неба вдали от Солнца, но и там засветка останется значительной. Если говорить об астрономических наблюдениях, то они будут затруднены также тем, что сфера будет блокировать излучение далеких объектов.

Система оценивания (от одного члена жюри).

1 этап: 2 балла.
Определение концентрации осколков в слое.
2 этап: 1 балл.
Указание, что осколки будут затенять свет Солнца друг от друга, а также накладываться друг на друга при наблюдении с Земли.
3 этап: 3 балла.
Создание модели расчета звездной величины неба в условиях взаимного затенения осколков. Модель может отличаться от предложенной выше, оценка определяется ее адекватностью.
4 этап: 2 балла.
Расчет звездной величины неба.

Вероятная ошибка при решении: Расчет звездной величины одного осколка, за которым следует прямой переход ко всей небесной полусфере с известным числом осколков, без учета эффекта затенения. В этом случае может быть выставлено 2 балла за первый этап и 2 балла за четвертый этап, с максимальной суммарной оценкой 4 балла. Если при этом не учитывается эффект фазы, и все осколки считаются полностью освещенными (с итоговым ответом около -25.8^m), то общая оценка уменьшается до (2+1)=3 баллов.