

10 класс

10.5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел? (*Н. Агаханов*)

Ответ. На 8 нулей.

Решение. Покажем, что сумма не может оканчиваться на 9 нулей. Каждое из составленных чисел делится на 9, поскольку сумма его цифр делится на 9. Поэтому их сумма также делится на 9. Наименьшее натуральное число, делящееся на 9 и оканчивающееся на девять нулей, равно $9 \cdot 10^9$, так что сумма наших чисел не меньше $9 \cdot 10^9$. Значит, одно из них не меньше 10^9 , что невозможно.

Осталось показать, как составить числа, сумма которых оканчивается на восемь нулей. Например, можно взять восемь чисел, равных 987654321, и одно число 198765432. Их сумма равна $81 \cdot 10^8$.

10.6. Квадрат разбит на $n^2 \geq 4$ прямоугольников $2(n-1)$ прямыми, из которых $n-1$ параллельны одной стороне квадрата, а остальные

$n - 1$ — другой. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников разбиения таким образом, что для любых двух выбранных прямоугольников один из них можно поместить в другой (возможно, предварительно повернув). (С. Берлов)

Решение. Назовём пару прямоугольников *вложимой*, если один из них можно вложить в другой.

Пусть горизонтальная сторона квадрата разбилась на отрезки длин a_1, \dots, a_n (слева направо), а вертикальная — на отрезки длин b_1, \dots, b_n (сверху вниз). Переставив «столбцы» и «строки», можно считать, что $a_1 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq \dots \geq b_n$. Обозначим через $Q_{i,j}$ прямоугольник разбиения со сторонами a_i и b_j . Заметим, что при $i \leq k$ и $j \leq \ell$ пара $Q_{i,j}$ и $Q_{k,\ell}$ вложима.

Поскольку $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, найдутся различные индексы i и j такие, что $a_i \geq b_i$ и $a_j \leq b_j$. Можно считать, что $i < j$. Тогда существует индекс $k \in [i, j]$ такой, что $a_k \leq b_k$ и $a_{k-1} \geq b_{k-1}$.

Мы утверждаем, что можно выбрать следующие прямоугольники: $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,k-1},$

$Q_{2,k-1}, \dots, Q_{k,k-1}$, вкупе с $Q_{k-1,k}, Q_{k,k}, \dots, Q_{k,n}, Q_{k+1,n}, \dots, Q_{n,n}$ (см. рис. 3). Их количество равно $2(k-1) + 2(n-k+1) = 2n$. Любая пара из них, кроме $(Q_{k,k-1}, Q_{k-1,k})$, вложима по замечанию выше. Наконец, оставшаяся пара также вложима, поскольку $a_k \leq b_k$ и $b_{k-1} \leq a_{k-1}$ (для вложения один прямоугольник нужно повернуть на 90°).

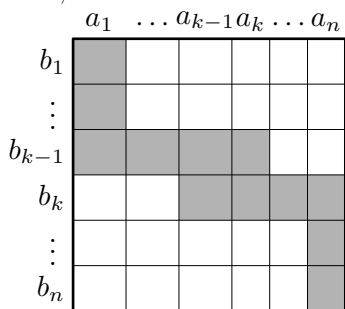


Рис. 3

- 10.7. На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырех написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными? (И. Богданов)

Ответ. Да, могли.

Первое решение. Подходят, например, числа

$$\begin{aligned}x &= N^2 - 3N + 1, & y &= N^2 - N + 1, \\z &= -3N^2 + 3N - 1, & t &= N^2 + N - 1,\end{aligned}$$

где N — натуральное число, большее миллиона.

Нетрудно видеть, что эти числа также больше миллиона по модулю и попарно различны. Их попарными суммами являются числа

$$\begin{aligned}x + y &= 2(N - 1)^2, & x + z &= -2N^2, & y + z &= -2N(N - 1), \\z + t &= -2(N - 1)^2, & y + t &= 2N^2, & x + t &= 2N(N - 1),\end{aligned}$$

и они разбиваются на три группы с равными произведениями:

$$(x + y)(x + z) = (y + t)(z + t) = (x + t)(y + z) = -4N^2(N - 1)^2.$$

Осталось проверить, что числа x, y, z, t взаимно просты в совокупности. Если у них есть общий натуральный делитель d , то d также делит $x + y = 2(N - 1)^2$ и $y + t = 2N^2$; значит, $d \leq \text{НОД}(2N^2, 2(N - 1)^2) = 2$. Случай $d = 2$ невозможен, поскольку $y = N(N - 1) + 1$ нечётно. Итак, $d = 1$, что и требовалось.

Замечание 1. Этот пример является частным случаем следующего, более общего. Выберем два взаимно простых числа m и n и потребуем, чтобы попарные суммы исходных шести чисел были равны $\pm 2mn$, $\pm 2m^2$ и $\pm 2n^2$. Эта шестёрка чисел хороша тем, что она разбивается на три пары чисел с равными (нулевыми) суммами, а также на другие три пары чисел с равными произведениями: $2mn \cdot (-2mn) = 2m^2 \cdot (-2n^2) = 2n^2 \cdot (-2m^2)$. Заметим, что каждая шестёрка целых чисел, обладающая первым свойством, является шестёркой попарных сумм каких-то четырёх (рациональных) чисел.

В решении использованы значения $m + 1 = n = N$. Подробнее о том, как найти этот пример, см. в замечании 3.

Второе решение. Идеологически другой пример получается, если положить

$$\begin{aligned}x &= N^3 - N^2 + 1, & y &= N^3 - 3N^2 + 2N - 1, \\z &= -N^3 + N^2 - 2N + 1, & t &= -N^3 + N^2 + 2N - 1,\end{aligned}$$

где N — натуральное число, большее миллиона. Опять же, эти числа больше миллиона по модулю и попарно различны. Их попарными суммами являются числа

$$x + y = 2N(N - 1)^2, \quad x + z = -2(N - 1), \quad y + z = -2N^2, \\ z + t = -2N^2(N - 1), \quad y + t = -2(N - 1)^2, \quad x + t = 2N,$$

и они разбиваются на три группы с равными произведениями:

$$(x + y)(x + t) = (x + z)(z + t) = (y + z)(y + t) = 4N^2(N - 1)^2.$$

Проверка их совокупной взаимной простоты проводится аналогично такой же проверке в предыдущем решении.

Замечание 2. Этот пример также является частным случаем более общего. В нём попарными суммами четырёх исходных чисел являются числа $2ab^2$, $2a^2b$, $2bc^2$, $2b^2c$, $2ca^2$ и $2c^2a$, где a , b , c — попарно взаимно простые целые числа с нулевой суммой. Свойства этой шестёрки такие же, как и у шестёрки из прошлого решения (для проверки равенства сумм достаточно заметить, что $2ab^2 + 2a^2b = 2(a + b)ab = -2abc$; другие подобные суммы также равны $-2abc$).

В решении использованы значения $a = N$, $b = 1 - N$, $c = -1$.

Замечание 3. Опишем метод поиска четвёрок *рациональных* чисел, удовлетворяющих требованиям задачи. (Из таких четвёрок можно получить требуемые четвёрки умножением на НОК знаменателей и делением на НОД числителей.)

Для начала перейдём (как и в предыдущих замечаниях) к поиску *шестёрок попарных сумм* наших трёх чисел. Единственным существенным условием на такую шестёрку является то, что она разбивается на три пары чисел с равными суммами: $(x + y) + (z + t) = (x + z) + (y + t) = (x + t) + (y + z)$. Действительно, если числа n_1, \dots, n_6 таковы, что $n_i + n_{7-i} = s$ при всех $i = 1, 2, 3$, то числами, дающими эти попарные суммы, являются, например, $\frac{n_1 + n_2 - n_3}{2}$, $\frac{n_1 + n_3 - n_2}{2}$, $\frac{n_2 + n_3 - n_1}{2}$, $s - \frac{n_1 + n_2 + n_3}{2}$ (есть и ещё одна четвёрка с такими же попарными суммами — какая?).

Итак, от нас требуется найти шестёрку чисел вида p , q , r , $s - p$, $s - q$, $s - r$ такую, что её элементы разбиваются на три пары чисел с равными произведениями. При этом числа шестёрки должны быть различными, кроме, разве что, совпадения чисел в одной паре вида $(t, s - t)$ (иначе два из исходных четырёх чисел

также совпадут). Есть три существенно различных способа осуществить такое разбиение.

1) Пусть $p(s-p) = q(s-q) = r(s-r) = \alpha$. Тогда числа p , q и r являются тремя различными корнями квадратного (относительно u) уравнения $u^2 - su + \alpha = 0$, что невозможно.

2) Пусть $p(s-q) = q(s-p) = r(s-r) = \alpha$. Тогда $ps = qs$, что, в силу $p \neq q$, возможно лишь при $s = 0$. Итого, наши шесть сумм есть $\pm p$, $\pm q$, $\pm r$; при этом они должны разбиваться на пары с равными произведениями. Это легко приводит к примеру из замечания 1.

3) Пусть $p(s-q) = q(s-r) = r(s-p)$. Тогда $0 = p(s-q) - q(s-r) = s(p-q) - q(p-r)$, то есть $\frac{s}{q} = \frac{p-r}{p-q}$. Аналогично, $\frac{s}{p} = \frac{r-q}{r-p}$ и $\frac{s}{r} = \frac{q-p}{q-r}$. Перемножая эти три равенства, получаем $s^3 = -pqr$. Исследуя эти уравнения далее, можно придти к примеру из замечания 2.

- 10.8. Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; пусть M — середина отрезка AB . В окружности Ω , описанной около треугольника ABC , проведен диаметр CC' . Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Пусть перпендикуляр к прямой AC' , проведенный через точку K , перпендикуляр к прямой BC' , проведенный через точку L , и прямая AB образуют треугольник Δ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника Δ , касается окружности Ω .

(М. Кунгожин)

Первое решение. Пусть данные перпендикуляры, проходящие через K и L , пересекают AB в точках U и V соответственно и пересекаются в точке E . Заметим сразу, что обе прямые AC и KE перпендикулярны прямой AC' , так что $AC \parallel KE$; аналогично, $BC \parallel LE$. Обозначим через ω окружность, описанную около треугольника EUV . Пусть прямая $C'E$ вторично пересекает окружность Ω в точке X (см. рис. 4). Мы докажем, что X — искомая точка касания окружностей ω и Ω .

Поскольку $\angle C'KE = \angle C'LE = 90^\circ$, четырёхугольник $C'KEL$ вписан. Отсюда имеем $\angle ACX = \angle AC'X = \angle KLE = \angle LCB$, то есть $\angle ACX = \angle MCB$ и $\angle BCX = \angle MCA$. Это значит, что прямая CX — *симедиана*

$= \angle EXQ = 90^\circ$, точки X , E , K и Q также лежат на одной окружности. Из этих двух окружностей получаем $\angle UEX = \angle KEX = \angle AQX = \angle AVX$, то есть точки U , V , E и X лежат на одной окружности ω . Кроме того, $\angle EVX = \angle QAX = \angle C'AX$. Это означает, что градусные меры дуг $C'X$ и EX окружностей Ω и ω равны. Значит, касательные к этим окружностям, проведенные в точке X , совпадают. Тем самым, окружности Ω и ω касаются.

Замечание 1. Догадаться до того, что окружности ω и Ω должны касаться именно в точке X , не очень сложно. Если эти окружности касаются, то точка касания является центром гомотетии, переводящей ω в Ω . Эта гомотетия должна переводить треугольник EUV в треугольник $A'B'C'$, симметричный ABC относительно O ; значит, точка касания должна лежать на $C'E$.

Замечание 2. Есть несколько других способов показать, что прямые CX , AC' и EL пересекаются в одной точке (Q) — к примеру, с использованием понятия гармоничности. Напомним, что четвёрка точек (A, B, C, D) , лежащих на одной прямой или одной окружности, называется *гармонической*, если $\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = 1$; четвёрка прямых, проходящих через одну точку, *гармоническая*, если четвёрка точек, отсекаемая ими на прямой, такова.

Поскольку X — точка пересечения симедианы с описанной окружностью, как известно, четвёрка (C, A, X, B) гармоническая (это следует из подобий $\triangle ACX \sim \triangle MCB$ и $\triangle BCX \sim \triangle MCA$). Значит, четвёрка прямых $C'C$, $C'A$, $C'X$ и $C'B$ — гармоническая. Обозначим $P' = KE \cap C'L$ и $Q' = LE \cap C'K$. Тогда в треугольнике $Q'C'P'$ прямые $Q'L$ и $P'K$ являются высотами, а E — ортоцентр, значит, $C'E \perp Q'P'$ (то есть $Q'P' \parallel CX$). Если $Q'P' \cap KL = \tilde{C}$, то четверка прямых $C'\tilde{C}$, $C'Q' = C'A$, $C'E = C'X$ и $C'P' = C'B$ гармоническая. Значит, прямые $C'C$ и $C'\tilde{C}$ совпадают, откуда $C = \tilde{C}$. Поскольку $P'Q' \parallel CX$, отсюда следует, что P' и Q' лежат на CX .

Второе решение. Введём точки E , U , V и X , как и в прошлом решении. Обозначим через A_1 , B_1 и C_1 точки пересечения прямой $C'E$ с прямыми BC , CA и AB соответственно. Как и выше, равенство $\angle ACX = \angle AC'X = \angle KLE = \angle LCB$

означает, что $\angle ACX = \angle KCB$; с другой стороны, из равенства $\angle KC'E = \angle KCA_1$ следует также, что точки C, C', K и A_1 лежат на одной окружности (см. рис. 5). Отсюда $\angle C'KA_1 = \angle C'CB = \angle C'AB$, то есть $KA_1 \parallel AB$.

Обозначим через N точку пересечения прямых KA_1 и AC . Поскольку $AB \parallel A_1K$ и прямая CM делит AB пополам, она делит пополам и A_1N , то есть $KN = KA_1$. Так как $KE \parallel AB_1$, KE — средняя линия в треугольнике A_1NB_1 , то есть $B_1E = EA_1$.

Пусть X' — точка на Ω , диаметрально противоположная X . Пусть прямые $X'A$ и $X'B$ пересекают прямую $C'E$ в точках S и T соответственно. Тогда $\angle SX'T = \angle ACB$ и $\angle X'ST = 90^\circ - \angle SX'C' = 90^\circ - \angle ABC' = \angle ABC$, то есть треугольники ABC и TSX' подобны. Более того, поскольку $\angle SX'X = \angle ACX = \angle BCM$, точки M и X в этих треугольниках соответственны, то есть $SX = XT$.

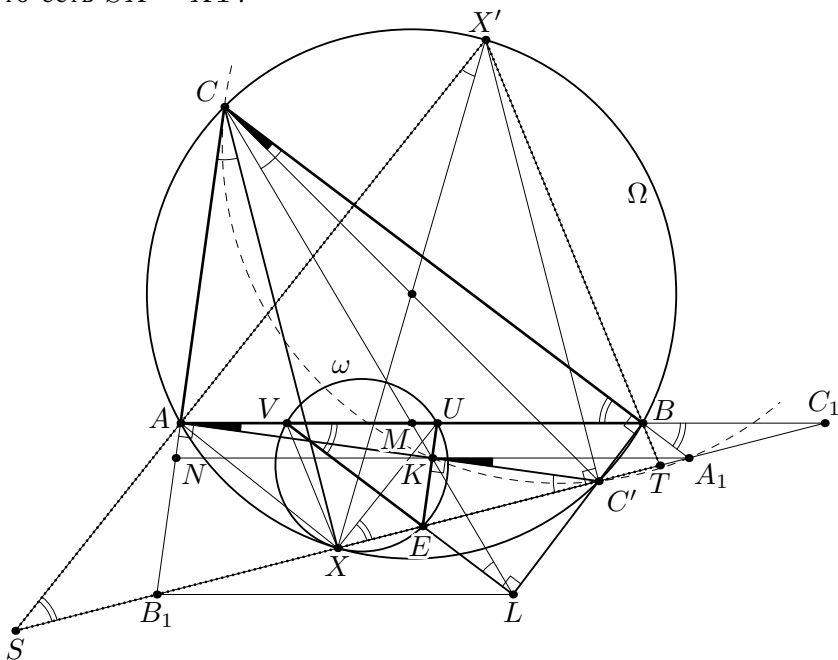


Рис. 5

Из равенства $\angle AST = \angle ABC = \angle C_1BA_1$ следует, что точ-

ки S , A , B и A_1 лежат на одной окружности, откуда $C_1A \cdot C_1B = C_1S \cdot C_1A_1$. Аналогично, $C_1A \cdot C_1B = C_1T \cdot C_1B_1$, поэтому $C_1S \cdot C_1A_1 = C_1T \cdot C_1B_1$, или $\frac{C_1S}{C_1B_1} = \frac{C_1T}{C_1A_1}$. Это значит, что отрезки A_1B_1 и TS гомотетичны с центром в C_1 ; эта гомотетия переводит середину E отрезка A_1B_1 в середину X отрезка ST . Значит, $\frac{C_1S}{C_1B_1} = \frac{C_1X}{C_1E}$, или $\frac{C_1S}{C_1X} = \frac{C_1B_1}{C_1E}$. В силу параллельности $AB_1 \parallel UE$, получаем $\frac{C_1A}{C_1U} = \frac{C_1B_1}{C_1E} = \frac{C_1S}{C_1X}$, что означает, что $UX \parallel AS$. Отсюда получаем $\angle UXE = \angle ASX = \angle ABC = \angle EVU$, то есть точки U , V , E и X лежат на одной окружности ω .

Наконец, рассмотрим треугольники ABC и UVE ; их соответственные стороны параллельны, так что они гомотетичны (с отрицательным коэффициентом). При этой гомотетии прямая CX' переходит в EX (поскольку $C'X \parallel CX'$), окружность Ω переходит в окружность ω , а значит, X' переходит в X . Поэтому касательная к ω в X параллельна касательной к Ω в X' , а значит — и касательной к Ω в X . Отсюда следует, что ω и Ω касаются в X .