11 класс

Задача 1. Колебания

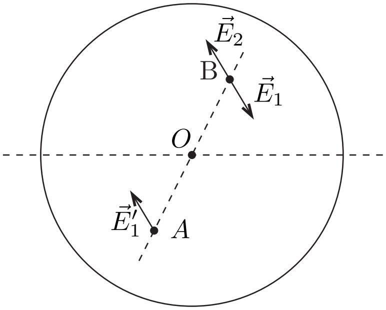

Рис. 21

Известно, что напряженность электростатического поля внутри равномерно заряженной сферы равна нулю. Поле в некоторой точке A складывается из полей, создаваемых верхней и нижней половинами сферы:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0. \tag{1}$$

Пусть точка B симметрична точке A относительно центра сферы (рис. 21). Из соображения симметрии напряженность поля, создаваемого в точке A нижней половиной сферы, равна по модулю и противоположна по направлению полю, создаваемому в точке B верхней половиной сферы : $\vec{E}_1' = -\vec{E}_1$. Тогда по формуле (1) получим $\vec{E}_1' = \vec{E}_2$, то есть величины напряженности поля, создаваемого однородно заряженной полусферой в симметричных относительно ее центра точках, равны.

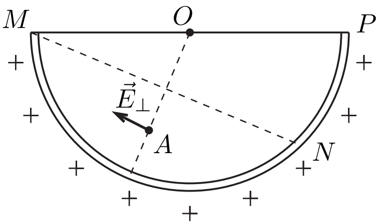

Рис. 22

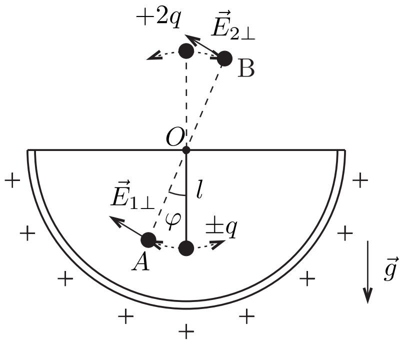

Рис. 23

Определим направление составляющей поля, перпендикулярной нити маятника, в точке A (рис. 22). Проведем плоскость, перпендикулярную нити маятника, проходящую через левый край сферы. Тогда часть MN сферы создает поле, параллельное нити маятника. Составляющая поля, перпендикулярная нити маятника, создается только оставшейся частью полусферы, следовательно большая часть заряда, создающего это поле, расположена в части полусферы, более удаленной от точки A; значит, составляющая поля направлена в сторону смещения маятника.

После изменения заряда шарика его положение равновесия должно располагаться выше точки подвеса, так как иначе невозможно равенство старого и нового периодов. Когда шарик расположен выше точки подвеса, при его смещении от положения равновесия возвращающая сила может возникнуть только за счет электростатического взаимодействия, следовательно должно быть $q_2 > 0$ (рис. 23).

В нижней точке при отклонении маятника на небольшой угол φ от положения равновесия возникает возвращающая сила f_1. Вклад в эту силу за счет электрического взаимодействия заряда с чашей пропорционален величине заряда и углу отклонения, поэтому:

$$f_1 = (\alpha q_1 - mg)\varphi.$$

В верхней точке (заряд шарика q_2) возвращающая сила равна:

$$f_2 = (-\alpha q_2 + mg)\varphi.$$

Соответствующие уравнения колебаний имеют вид (здесь l — длина нити маятника):

$$ml\ddot{\varphi} + (mg - \alpha q_1)\,\varphi = 0 \quad \text{для нижней точки,}$$
$$ml\ddot{\varphi} + (\alpha q_2 - mg)\,\varphi = 0 \quad \text{для верхней точки.}$$

Тогда частоты колебаний вблизи нижнего и верхнего положений равновесия будут равны, соответственно,

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta q_1,$$
$$\omega_2^2 = -\omega_0^2 + \beta q_2,$$

где $\omega_0^2 = g/l$ - частота колебаний в незаряженной полусфере, $\beta = \alpha/(ml)$ — константа.

Условие задачи может реализовываться в двух случаях: $q_1 > 0$ и $q_1 < 0$. В обоих случаях шарик вначале колеблется вблизи нижнего, а затем вблизи верхнего положения равновесия.

Случай 1

Рассмотрим случай $q_1 > 0$. Тогда $q_2 = 2q_1$.

По условию $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, следовательно, получаем

$$\omega_0^2 - \beta q_1 = -\omega_0^2 + 2\beta q_1, \qquad \text{отсюда} \qquad \beta q_1 = \frac{2}{3}\omega_0^2$$

Следовательно $\omega^2 = \frac{1}{3}\omega_0^2$ и период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0\sqrt{3} = 1{,}73 \text{ с.}$$

Здесь $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ — период колебаний маятника в незаряженной полусфере.

Случай 2

Рассмотрим случай $q_1 < 0$. Тогда $q_2 = -2q_1$.

Аналогично случаю 1 приравниваем значения частот ω_1 и ω_2, находим $\beta q_1 = -2\omega_0^2$. Отсюда $\omega^2 = 3\omega_0^2$ и период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{3}} = 0{,}58 \text{ с}.$$

Задача 2. Проводящий кубик

Примем потенциал вершины B за ноль. При пропускании через вершины A и B тока I, из соображений симметрии, получим, что потенциал точки M равен

$$\varphi_M = \frac{1}{2}\varphi_A = \frac{1}{2}Ir,$$

а разность потенциалов

$$U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = (\varphi_A - \varphi_M) + (\varphi_M - \varphi_C) = \frac{1}{2}Ir + U.$$

Пустим через вершину B ток I в обратном направлении, так, чтобы скомпенсировать выходящий из неё ток I, и выведем этот ток через вершину C. Для этого придётся на вершину C подать потенциал, равный

$$\varphi_{\text{C}} = -\left(\frac{1}{2}Ir + U\right).$$

Напомним, что $\varphi_B = 0$. Разность потенциалов между вершинами A и C окажется равной

$$U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C = 2\left(\frac{1}{2}Ir + U\right) = 2U + Ir.$$

По принципу суперпозиции, ток I будет входить в вершину A, а выходить и из вершины C (из вершины B ток не выходит и не входит). По закону Ома:

$$R_{AC} = \frac{U_{AC}}{I} = \frac{2U}{I} + r = 36 \text{ кОм}.$$

Пусть длина ребра куба равна a, толщина пластины — d. Заметим, что сопротивление куба $R \sim L/S \sim a/ad = 1/d$ – не зависит от длины a стороны квадрата, где $L \sim a$ – характерный размер, а $S \sim ad$ – характерное поперечное сечение пластины при расчёте сопротивления кубика. Следовательно, при изменении длины стороны квадратной пластины и неизменной её толщине d, сопротивление пластины не изменится.

Задача 3. Реактивная трубка

Такая трубка с нагревателем представляет собой реактивный двигатель, принцип работы которого аналогичен принципу работы водомётного катера. Действительно, из-за нагрева и, соответственно, расширения, скорость горячего воздуха на выходе из трубки оказывается больше скорости холодного воздуха на входе в трубку. В результате возникает реактивная сила, разгоняющая трубку. Найдём выражение для этой реактивной силы тяги. В системе отсчета, связанной с трубкой, поток воздуха с небольшой скоростью продувается через трубу с нагревателем в виде сетки. (Кстати, это стандартная лабораторная установка для измерения теплоёмкости газов C_p при постоянном давлении). Найдём изменение температуры воздуха. Пренебрегая изменением кинетической энергии потока воздуха, запишем закон сохранения энергии для массы m газа, протекающего через трубку в единицу времени. Если этот воздух в холодном состоянии занимал объём V_1, а в горячем V_2, то по первому началу термодинамики подведённая к газу за единицу времени теплота q расходуется на изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ и работу газа против внешнего давления $A = P(V_2 - V_1)$: $q = \Delta U + A$, или

$$q = U_2 - U_1 + PV_2 - PV_1 = (U_2 + PV_2) - (U_1 + PV_1) =$$
$$= \frac{m}{\mu}\Big((C_V T_2 + RT_2) - (C_V T_1 + RT_1)\Big) = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T,$$

где $C_V = 5R/2$ — молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме, $C_P = C_V + R = 7R/2$ молярная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении, $R = 8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — универсальная газовая постоянная, T_2 и T_1 — температуры воздуха на выходе и на входе в трубку, соответственно. Если скорость холодного воздуха v, а изменение скорости течения воздуха Δv, то реактивная сила:

$$F_p = m\Delta v = \frac{mv\Delta v}{v} = \frac{mv\Delta T}{T} = \frac{v\mu q}{C_P T} = \beta v.$$

Сила тяги оказывается пропорциональной скорости движения трубки. Коэффициент пропорциональности:

$$\beta = \frac{\mu q}{C_P T} = 6{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{кг/с}.$$

По закону Ньютона:

$$M dv = F_p dt = \beta v dt = \beta dS, \quad \text{следовательно,} \quad M\Delta v = \beta S.$$

Окончательно, $v = v_0 + \dfrac{\beta S}{M} = 9$ см/с.

Задача 4. Космический объект

При угле φ между направлением движения объекта и направлением к наблюдателю посланные через время T_0 импульсы будут приниматься наблюдателем через промежуток времени $T = T_0(1 + (v/c)\cos\varphi)$, где v - скорость объекта.

В самом деле, если из точки A испущен первый импульс, то следующий импульс испускается через время T_0 из точки B на расстоянии vT_0. Пути к наблюдателю почти параллельны, а разница их составляет отрезок $BC = AB\cos\varphi =$ $= vT_0\cos\varphi$ (рис. 24), проходимый за дополнительное время $(vT_0\cos\varphi)/c$, где c - скорость света. В сумме с T_0 это и дает выражение для T. Пока угол φ можно считать почти постоянным, такое же соотношение будет верным для любых промежутков времени Δt_0 при испускании сигналов и Δt при их приеме:

$$\Delta t = \Delta t_0(1 + (v/c)\cos\varphi).$$

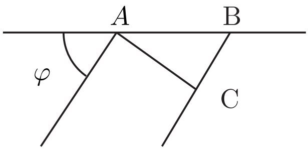

Рис. 24

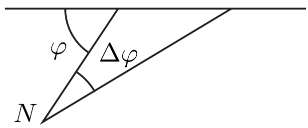

Рис. 25

Теперь вычислим приращение периода при приеме при изменении угла φ на $\Delta\varphi$ (если из направление точки N (наблюдатель) к космическому объекту повернулось на угол $\Delta\varphi$, то начальный угол переходит в угол $\varphi-\Delta\varphi$ (рис. 25)):

$$\Delta T = \left|\frac{dT}{d\varphi}\right| \Delta\varphi = T_0\frac{v}{c}\sin\varphi\Delta\varphi$$

($v\sin\varphi$ это составляющая скорости, перпендикулярная к радиусу вектору).

Тогда при времени перемещения Δt_0, отвечающему времени наблюдения Δt имеем $\Delta\varphi = v\Delta t_0\sin\varphi/r$, где r - искомое расстояние. Исключая скорость из выражения для ΔT, получим:

$$\Delta T = T_0(\Delta\varphi)^2 r/c\Delta t_0 = T(\Delta\varphi)^2 r/c\Delta t$$

поскольку $T_0/T = \Delta t_0/\Delta t$. Окончательно получаем:

$$r = \frac{c\Delta T\Delta t}{T(\Delta\varphi)^2}.$$

Поскольку рассмотрение проводилось только в системе отсчёта наблюдателя, то результаты применимы в общем случае, а не только при скоростях объекта $v \ll c$.

Задача 5. «Миллиавтомобиль»

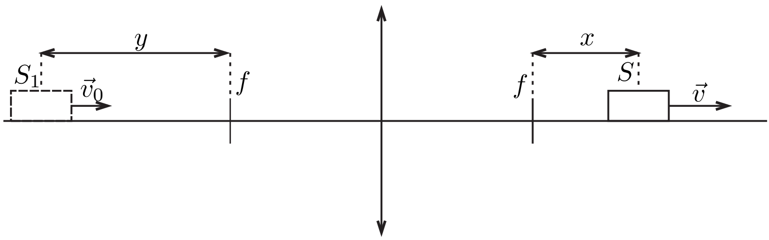

Рис. 26

Если расстояние от источника S до переднего фокуса линзы равно x, а от его изображения до заднего фокуса y, то по формуле тонкой линзы в форме Ньютона ($xy = f^2$) для малых перемещений Δx и Δy получим:

$$x\Delta y + y\Delta x = 0 \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{v}{v_0} = -\frac{x}{y} = -\frac{xy}{y^2} = -\frac{f^2}{y^2}.$$

отсюда скорость автомобиля: $v = -v_0 f^2/y^2$. Знак «$-$» означает, что если автомобиль удаляется от фокуса (x растет, то есть $v > 0$), его изображение приближается к фокусу (y уменьшается, $v_0 < 0$). Ускорение автомобиля:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2\frac{v_0 f^2}{y^3}\frac{dy}{dt} = 2\frac{v_0^2 f^2}{y^3} = 2\frac{v_0^2 x^3}{f^4}.$$

Это ускорение не может превышать (по модулю) значения $a_{max} = \mu g$. Следовательно, получаем неравенство:

$$\frac{2v_0^2|x|^3}{f^4} \leqslant \mu g, \qquad \text{откуда} \qquad |x| \leqslant f\sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}},$$

т.е. автомобиль не может удалиться от фокуса на расстояние большее, чем $f\sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}}$. Следовательно, расстояние l от автомобиля до линзы может изменяться в пределах:

$$f\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}}\right) \leqslant l < f \qquad \text{или} \qquad f < l \leqslant f\left(1 + \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}}\right).$$

Изображение может быть как мнимым ($l < f$), так и действительным ($l > f$).

Если $v_0 < \sqrt{\frac{\mu g f}{2}}$, то

$$0 < l < f \qquad \text{или} \qquad f < l \leqslant f\left(1 + \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}}\right).$$