

10 класс

**Задача 1. Упругая система**

Из условия следует, что сумма сил натяжения пружин всегда равна  $F$ , растяжения пружин в начальный момент одинаковы и равны  $x_0 = F/k$ , где  $k = k_1 + k_2$ , суммарная начальная энергия пружин  $E_0 = F^2/2k$ .

1. В момент, когда скорость груза максимальна, его ускорение равно нулю, значит первая пружина недеформирована, а вторая растянута силой  $F$ . Приравнявая работу силы  $F$  изменению энергии системы, получим

$$F \left( \frac{F}{k_2} - \frac{F}{k} \right) = \frac{mv^2}{2} + \frac{F^2}{2k_2} - \frac{F^2}{2k},$$

откуда максимальная скорость груза:

$$v = F \sqrt{\frac{k_1}{mk_2(k_1 + k_2)}}.$$

2. Так как сумма сил натяжения пружин постоянна, минимальность одной из них означает максимальность другой, поэтому в момент минимального удлинения одной из пружин скорость изменения длины будет нулевой у обеих пружин, а значит, будет равна нулю и скорость груза. Тогда для растяжений пружин  $x_1$  и  $x_2$  в этот момент получим систему уравнений:

$$\begin{cases} k_1x_1 + k_2x_2 = F, \\ F(x_2 - x_0) + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{k_1x_1^2}{2} + \frac{k_2x_2^2}{2}. \end{cases}$$

Решение системы существенно облегчается, если заметить, что начальные значения растяжений  $x_1 = x_2 = x_0$  должны ей удовлетворять, так как скорость груза в начальный момент равна нулю. Второе решение

$$x_1 = -x_0, \quad x_2 = x_0 \frac{2k_1 + k_2}{k_2}.$$

Таким образом удлинение первой пружины в момент, когда её длина будет минимальна, равно

$$x_1 = -\frac{F}{k_1 + k_2}.$$

Отрицательный знак означает, что пружина в этот момент будет сжата.

### Задача 2. Исследование планеты

Рассмотрим участок атмосферы площадью поперечного сечения  $S$ , находящийся между слоями с координатами  $z$  и  $z + \Delta z$ . На него действуют: снизу — сила давления  $p(z)S$ , сверху — сила давления  $p(z + \Delta z)S$ ; также действует направленная вниз сила тяжести  $\rho S \Delta z g$ , где  $\rho$  — плотность воздуха на данной высоте. Так как атмосфера находится в равновесии, сумма сил, приложенных к рассматриваемому участку, равна 0:

$$(p(z) - p(z + \Delta z))S - \rho S \Delta z g = 0$$

Перепишем данное уравнение в виде  $\Delta p = -\rho g \Delta z$ , где  $\Delta p = p(z + \Delta z) - p(z)$ . Учитывая, что температура атмосферы  $T$  выражается через давление, плотность, молярную массу  $\mu$  и универсальную газовую постоянную  $R$  соотношением  $p = \frac{\rho}{\mu} RT$ , получим:

$$T = \frac{p}{-\Delta p / \Delta z} \frac{\mu g}{R}$$

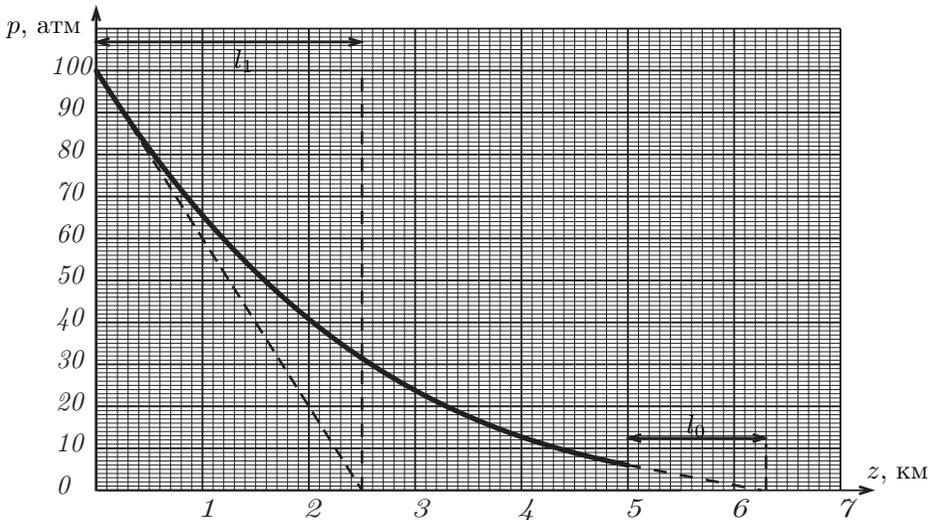


Рис. 16

Величины  $\mu$  и  $g$  можно считать постоянными: атмосферу считаем состоящей из углекислого газа,  $g$  считаем постоянным, так как радиус планеты много больше величины перемещения спускаемого аппарата. Следовательно, температура пропорциональна величине:

$$T \propto \frac{p}{\Delta p / \Delta z}.$$

Это выражение при  $z = 0$  и  $z = 5$  км можно найти графически: провести касательную к графику и отметить точку пересечения касательной с горизонтальной осью. Учитывая, что  $l_0 = 2,5$  км,  $l_1 = 1,25$  км, для температуры  $T_0$  у поверхности планеты получим  $T_0 = T_1 l_0 / l_1 = 680 \pm 40$  К. Ответ записан с погрешностью, так как касательные проводятся с некоторой точностью. Нахождение погрешностей не требовалось и не оценивается.

### Задача 3. Термoeлектродинамика

Обозначим через  $V$ ,  $P$  и  $T$  начальные значения объёма, давления и температуры газа,  $d$  — начальное расстояние между дисками, а те же величины с индексом 1 — те же параметры в конечном состоянии. Так как расстояние между дисками много меньше их радиуса, напряжённость поля диска можно вычислять, считая его равномерно заряженной бесконечной плоскостью:

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S},$$

где  $S$  — площадь дисков.

Тогда на второй диск со стороны первого действует сила  $F = qE$ :

$$F = qE = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

Сила пропорциональна квадрату заряда и не зависит от расстояния между пластинами, поэтому конечное равновесное давление будет в четыре раза меньше начального.

Энергия конденсатора равна

$$W_c = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S} = Fd = PV.$$

Рассмотрим систему, состоящую из газа и заряженных пластин. Её энергия равна

$$W = PV + \frac{3}{2}PV = \frac{5}{2}PV = \frac{5}{2}\nu RT.$$

Энергия системы в конечном равновесном состоянии должна равняться начальной энергии:

$$\frac{5}{2}P_1 V_1 = \frac{3}{2}PV + \frac{P}{4}V, \quad \text{откуда} \quad \frac{5}{2}\nu RT_1 = \frac{7}{4}\nu RT, \quad \text{и} \quad T_1 = \frac{7}{10}T.$$

Теперь, используя  $P_1 = P/4$ :

$$\frac{P_1 V_1}{PV} = \frac{T_1}{T} = \frac{7}{10}, \quad \text{откуда} \quad \frac{d_1}{d} = \frac{V_1}{V} = \frac{14}{5}.$$

Полученный ответ подтверждает предположение о малости  $d$  в конечном состоянии.

### Задача 4. Стенка с дыркой

При упругом ударе бруска 1 о стену изменяется направление его скорости при сохранении величины скорости. В этот момент времени скорости равны  $v_1 = -v$ ,  $v_2 = v_3 = v$  (рис. 17).

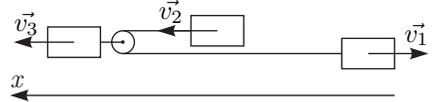


Рис. 17

1. Резинка будет максимально натянутой, когда скорость увеличения её длины станет равна нулю. Эту скорость можно выразить через скорости брусков в момент максимального растяжения:

$$v_{\text{растяжения}} = 2v_3 - v_2 - v_1 = 0. \quad (20)$$

На систему не действуют внешние силы, поэтому, из закона сохранения импульса следует:

$$v_3 + v_2 + v_1 = v. \quad (21)$$

Запишем второй закон Ньютона для первого и второго брусков:

$$m \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = T, \quad m \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = T.$$

Отсюда видно, что изменение скоростей первого и второго бруска в любой момент времени связано соотношением  $\Delta v_1 = \Delta v_2$ , а значит, и суммарные изменения скоростей связаны таким же образом:

$$v_2 - v = v_1 - (-v). \quad (22)$$

Из трех уравнений (20), (21), (22) получаем значения скоростей в момент времени, когда резинка максимально растянута

$$v_1 = -\frac{2}{3}v, \quad v_2 = \frac{4}{3}v, \quad v_3 = \frac{1}{3}v.$$

2. Обозначим скорости брусков в момент времени, когда резинка снова не натянута, как  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ . Закон сохранения импульса (21) и связь между скоростями  $v_1$  и  $v_2$  (22) остаются прежними.

Условием того, что резинка не натянута, является равенство нулю потенциальной энергии резинки. Из закона сохранения энергии следует:

$$3v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \quad (23)$$

Из уравнений (21), (22), (23) получаем два решения. Первое решение:

$$v_1 = -v, \quad v_2 = v, \quad v_3 = v,$$

соответствует начальной ситуации, которая больше не повторится.

Второе решение:

$$v_1 = -\frac{1}{3}v, \quad v_2 = \frac{5}{3}v, \quad v_3 = -\frac{1}{3}v,$$

является ответом на второй вопрос задачи.

### Задача 5. Нелинейность

Сначала установим, при каком требовании к нагрузке мощность потерь максимальна для данного источника. Пусть ЭДС и внутреннее сопротивление источника равны соответственно  $\mathcal{E}$  и  $r$ , а сила тока, протекающего через нагрузку равна  $I$ . Тогда мощность потерь  $P_{\text{н}} = IU_{\text{н}} = I(\mathcal{E} - Ir)$ . В зависимости от сопротивления нагрузки  $R$  сила тока может изменяться от нуля (если  $R$  бесконечно велико) до тока короткого замыкания источника  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r}$  (при  $R = 0$ ). Легко заметить, что максимум  $P_{\text{н}}$  соответствует  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{2r} = \frac{I_0}{2}$  (это координата вершины параболы – графика функции  $P_{\text{н}}(I)$ ). В этом случае сопротивление нагрузки  $R = r$ , а напряжение  $U_{\text{н}} = IR = \frac{\mathcal{E}}{2}$ . Значит, при таком напряжении сила тока, протекающего и через лампу, и через диод равна  $\frac{I_0}{2}$ , и связь тока с напряжением для них дается выражениями:

$$I_{\text{л}} = \frac{I_0}{2} \sqrt{\frac{2U_{\text{л}}}{\mathcal{E}}} = \sqrt{\frac{I_0 U_{\text{л}}}{2r}}, \quad I_{\text{д}} = \frac{I_0}{2} \left( \frac{2U_{\text{д}}}{\mathcal{E}} \right)^2 = \frac{2U_{\text{д}}^2}{I_0 r^2}.$$

Обратные выражения:

$$U_{\text{л}} = \frac{2r}{I_0} I_{\text{л}}^2, \quad U_{\text{д}} = r \sqrt{\frac{I_0 I_{\text{д}}}{2}}.$$

Далее можно действовать двумя путями:

Первый способ (алгебраический):

Запишем для последовательного подключения уравнение для напряжения на нагрузке (общий ток через диод и лампу обозначим  $I_1$ ):

$$\mathcal{E} - I_1 r = (I_0 - I_1)r = U_{\text{л}}(I_1) + U_{\text{д}}(I_1) = \frac{2r}{I_0} I_1^2 + r \sqrt{\frac{I_0 I_1}{2}}$$

Если в этом уравнении сделать подстановку  $I_1 = I_0 x$ , то для  $x$  получится уравнение  $1 - x = 2x^2 + \sqrt{\frac{x}{2}}$ . Оно сводится к уравнению четвертой степени, но решать его не нужно. Отметим только, что в левой части стоит монотонно убывающая функция от  $x$ , а в правой – монотонно растущая при  $x > 0$ . Поэтому в этой области данное уравнение имеет один корень. Запишем теперь также уравнение для параллельного подключения (ток источника  $I_2$ ):

$$\mathcal{E} - I_2 r = (I_0 - I_2)r = U_{\text{л}}(I_{\text{л}}) = U_{\text{д}}(I_{\text{д}}) = \frac{2r}{I_0} I_{\text{л}}^2 = r \sqrt{\frac{I_0 I_{\text{д}}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} I_{\text{л}} = \sqrt{\frac{I_0(I_0 - I_2)}{2}} \\ I_{\text{д}} = \frac{2(I_0 - I_2)^2}{I_0} \end{cases}$$

и при этом  $I_2 = I_n + I_d = \sqrt{\frac{I_0(I_0 - I_2)}{2}} + \frac{2(I_0 - I_2)^2}{I_0}$ . Это уравнение для  $I_2$ , в котором можно сделать подстановку  $I_2 = I_0(1 - y)$ , и тогда  $1 - y = 2y^2 + \sqrt{\frac{y}{2}}$ . Это уравнение ничем не отличается от уравнения для  $x$ , и у него один корень. Значит,  $y = x$ , или  $I_1 + I_2 = I_0$ ! Заметим, что мощность потерь в первом случае  $P_1 = I_1(\mathcal{E} - I_1 r) = r I_1(I_0 - I_1)$ , а во втором:  $P_2 = I_2(\mathcal{E} - I_2 r) = r I_2(I_0 - I_2) = r(I_0 - I_1)I_1 = P_1 = 7,2$  Вт.

Второй способ (графический): Построив графики вольтамперных характеристик (ВАХ) лампы и диода, можно графически построить и графики ВАХ двух нагрузок, соответствующих последовательному и параллельному соединению (рисунки 1, 2).

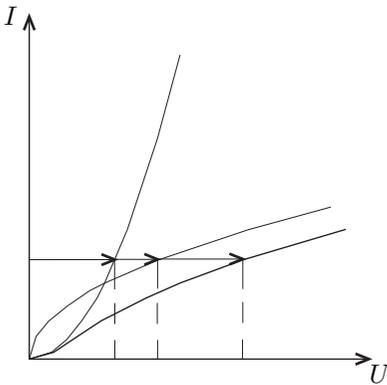


Рис. 18

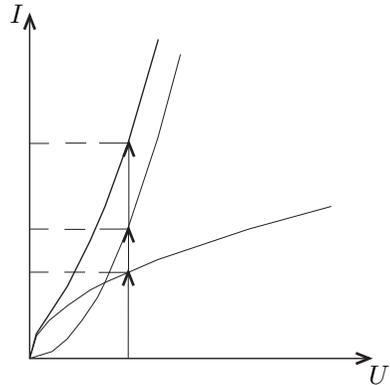


Рис. 19

Если в качестве единиц масштабов по осям тока и напряжения выбрать соответственно  $I_0$  и  $\mathcal{E}$ , и построить их на одном графике (рисунок 3), то они будут симметричны относительно биссектрисы координатного квадранта. Токи через источник для каждой из нагрузок ( $I_1$  и  $I_2$ ) определяются решением уравнения  $U(I) = \mathcal{E} - Ir$ , то есть пересечением на графике 3 ВАХ нагрузки с прямой  $\frac{U}{\mathcal{E}} = 1 - \frac{I}{I_0}$ , которая также обладает указанной симметрией, поэтому точки пересечения расположены также симметрично, и поэтому:

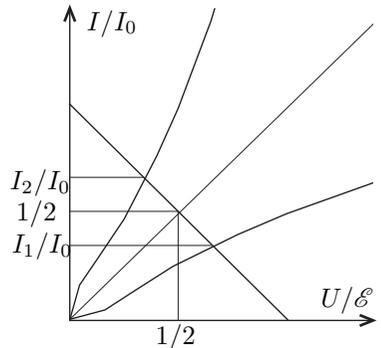


Рис. 20

$$\frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0} = 1 \Rightarrow I_1 + I_2 = I_0$$

Теперь снова легко обнаружить, что:  $P_2 = I_2(\mathcal{E} - I_2 r) = r I_2(I_0 - I_2) = r(I_0 - I_1)I_1 = P_1 = 7,2$  Вт. Окончательно,  $P_2 = P_1 = 7,2$  Вт.