11 класс

Первый день

11.1. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC.

11.2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, …, $\frac{n-1}{n}$ и приведём каждую к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную чётность?

11.3. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд.

11.4. Дано натуральное число $N \geqslant 3$. Назовём набор из N точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из N точек можно разделить многочленом степени не более k?

XLI Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC.

11.2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, …, $\frac{n-1}{n}$ и приведём каждую к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную чётность?

11.3. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд.

11.4. Дано натуральное число $N \geqslant 3$. Назовём набор из N точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из N точек можно разделить многочленом степени не более k?