Условия и решения задач

9 класс

9.5. По кругу записаны 100 целых чисел. Каждое из чисел больше суммы двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди записанных? (*С. Берлов*)

Ответ. 49.

Решение. Предположим, что два неотрицательных числа стоят рядом. Тогда число, стоящее перед ними, больше их суммы, то есть оно положительно. Аналогично, число перед ним также положительно, и т. д. В итоге получаем, что все числа неотрицательны; но тогда наименьшее из них не может быть больше суммы двух следующих — противоречие.

Итак, среди любых двух чисел подряд есть хотя бы одно отрицательное. Значит, положительных чисел не более 50. Пусть их ровно 50, тогда они чередуются с отрицательными. Рассмотрим теперь три числа $-a$, b, $-c$, стоящие подряд (здесь $a, b, c > 0$). Тогда $-a > b - c > -c$, то есть любое отрицательное число строго больше следующего за ним отрицательного числа. Поскольку числа стоят по кругу, это невозможно. Стало быть, положительных чисел не более 49.

Осталось привести пример, в котором ровно 49 положительных чисел. Годится, например, такая расстановка:

$$-200,\ 1,\ -202,\ 1,\ -204,\ 1,\ -206,\ 1,\ \ldots,\ -296,\ 1,\ -298,\ -99.$$

9.6. Поле представляет собой клетчатый квадрат 41×41, в одной из клеток которого замаскирован танк. Истребитель за один выстрел обстреливает одну клетку. Если произошло попадание, танк переползает на соседнюю по стороне клетку поля, если нет — остаётся на месте. При этом после выстрела пилот истребителя не знает, произошло ли попадание. Для уничтожения танка надо попасть в него два раза. Каким наименьшим числом выстрелов можно обойтись для того, чтобы гарантировать, что танк уничтожен? (*С. Берлов, А. Магазинов*)

Ответ. $\dfrac{3\cdot 41^2-1}{2}=2521$ выстрелов.

Решение. Окрасим клетки в шахматном порядке так, чтобы углы поля были чёрными. Пусть пилот сначала выстрелит по всем белым полям, затем по всем чёрным, а затем снова по всем белым. Если танк был на белом поле, то пилот его подобьёт в первой и второй сериях; если же на чёрном — то во второй и третьей сериях. При этом пилот совершит $41^2+\dfrac{41^2-1}{2}=\dfrac{3\cdot 41^2-1}{2}$ выстрелов.

Осталось показать, что меньшим числом выстрелов не обойтись. Пусть у пилота есть последовательность выстрелов, после которой танк будет гарантированно уничтожен. Ясно, что по любой клетке он должен выстрелить хотя бы раз (иначе танк в этой клетке не будет уничтожен).

Предположим, что есть две соседних клетки A и B, по которым он стрелял ровно по разу, причём выстрел по B произошёл позже. Тогда, если танк изначально находился в B, он мог после выстрела по B переползти в A, и второго попадания не произошло бы. Это невозможно; значит, таких пар клеток нет.

Разобьём теперь всю доску на $\dfrac{41^2-1}{2}$ прямоугольников 1×2 и одну клетку. По доказанному, в каждый прямоугольник истребитель должен сделать как минимум три выстрела, а в оставшуюся клетку — хотя бы один выстрел. Итого, он сделал не менее, чем $3\cdot\dfrac{41^2-1}{2}+1=\dfrac{3\cdot 41^2-1}{2}$ выстрелов.

9.7. Остроугольный треугольник ABC $(AB<AC)$ вписан в окружность Ω. Пусть M — точка пересечения его медиан, а AH — высота этого треугольника. Луч MH пересекает Ω в точке A'. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A'HB$, касается AB. *(А. И. Голованов, А. Якубов)*

Решение. Выберем на Ω точку D так, что $AD\parallel BC$ (см. рис. 1); тогда точки A и D симметричны относительно серединного перпендикуляра к BC. Пусть H' — проекция точки D на BC, а K — середина BC. Из симметрии, K также является серединой отрезка HH'; кроме того, $HH'=AD$.

Пусть X — точка пересечения отрезков AK и DH. Тогда треугольники ADX и KHX подобны, откуда $\dfrac{AX}{KX}=\dfrac{AD}{KH}=$

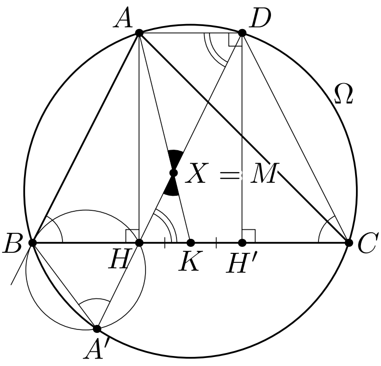

Рис. 1

$= \frac{2KH}{KH} = 2$. Значит, X — точка пересечения медиан треугольника ABC, то есть $X = M$. Итак, точки A', H, M и D лежат на одной прямой.

Из симметрии имеем $\angle ABC = \angle BCD$. Кроме того, $\angle BCD = \angle BA'D$ как опирающиеся на одну дугу. Значит, $\angle ABH = \angle ABC = \angle BA'D = \angle BA'H$. Это и означает, что AB — касательная к окружности, описанной около треугольника $BA'H$.

Замечание. Тот факт, что точки H, M, D (а значит, и A') лежат на одной прямой, можно доказать и по-другому — например, так. Рассмотрим окружность ω, описанную около треугольника с вершинами в серединах сторон AB, BC и CA. Как известно, она проходит через H. При гомотетии с центром в точке M и коэффициентом -2 окружность ω переходит в Ω. Значит, точка H при этой гомотетии перейдет в такую точку D на описанной окружности, что $AD \parallel BC$. Поэтому точки H, M и D лежат на одной прямой.

9.8. На доске написаны $N \geqslant 9$ различных неотрицательных чисел, меньших единицы. Оказалось, что для любых восьми различных чисел с доски на ней найдётся девятое, отличное от них, такое, что сумма этих девяти чисел целая. При каких N это возможно?

(*Ф. Нилов*)

Ответ. Только при $N = 9$.

Решение. Ясно, что при $N = 9$ требуемое возможно — достаточно написать на доску 9 различных положительных чисел с единичной суммой. Покажем, что при $N > 9$ требуемое невозможно. Предположим противное; обозначим через S сумму всех чисел на доске.

Выберем на доске произвольные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ с суммой T; пусть A — множество всех остальных чисел на доске. По условию, для любого числа $\beta \in A$ найдется такое отличное от него число $\gamma \in A$, что число $T + \beta + \gamma$ целое. Скажем, что число γ *соответствует* числу β. Заметим, что такое число γ единственно. Действительно, если бы нашлось другое число $\gamma' \in A$, для которого сумма $T + \beta + \gamma'$ целая, то число $\gamma - \gamma' = (T + \beta + \gamma) - (T + \beta + \gamma')$ также было бы целым; это невозможно, ибо $0 < |\gamma - \gamma'| < 1$.

В частности, отсюда следует, что β соответствует числу γ. Значит, все числа в A разбиваются на пары чисел (β_1, γ_1), ..., $(\beta_\ell, \gamma_\ell)$, соответствующих друг другу. При этом $\ell > 1$, так как $N = 7 + 2\ell > 9$.

Рассмотрим теперь сумму

$$\Sigma = (T + \beta_1 + \gamma_1) + (T + \beta_2 + \gamma_2) + \ldots + (T + \beta_\ell + \gamma_\ell).$$

Тогда Σ — целое число. С другой стороны, каждое число из A входит в Σ ровно по разу; значит, $\Sigma = \ell T + (S - T) = S + (\ell - 1)T$, откуда $T = \frac{\Sigma - S}{\ell - 1}$.

Выбрав теперь на доске числа $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_8$ и обозначая их сумму через T', аналогично получаем, что $T' = \frac{\Sigma' - S}{\ell - 1}$ при целом Σ'. Значит,

$$\alpha_1 - \alpha_8 = \frac{\Sigma - S}{\ell - 1} - \frac{\Sigma' - S}{\ell - 1} = \frac{\Sigma - \Sigma'}{\ell - 1}.$$

Так как α_1 и α_8 могли быть любыми двумя числами на доске, получаем, что разность любых двух чисел на доске имеет вид $\frac{k}{\ell - 1}$ при целом k.

Пусть теперь μ — наименьшее число на доске. Тогда на доске могут присутствовать лишь числа $\mu, \mu + \frac{1}{\ell - 1}, \ldots, \mu + \frac{\ell - 2}{\ell - 1}$ (все бóльшие числа будут уже не меньше 1) — всего ℓ чисел. Однако общее количество чисел на доске равно $N = 7 + 2\ell > \ell$; значит, они не могут быть различными. Противоречие.