

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР



9 класс



IX. 1

ВОСТОЧНЫЙ ЭКСПРЕСС

О.С. Угольников

? Поезд движется равномерно на восток со скоростью 50 км/ч. Его пассажиры наблюдают верхнюю кульминацию Луны один раз в сутки в один и тот же момент по Всемирному времени. На какой широте находится поезд? Эксцентриситетом орбиты Луны и ее наклоном к плоскости экватора, а также сжатием Земли пренебречь.

! Если пренебречь эксцентриситетом орбиты Луны и ее наклоном к плоскости экватора, то можно считать, что она равномерно движется по орбите с запада на восток с периодом $T_L = 27.32$ суток. За 24 часа (t) она пройдет дугу величиной

$$\lambda_L = 360^\circ \frac{t}{T_L} = 13.18^\circ.$$

Сама Земля, обращаясь вокруг своей оси с периодом T_E (23 часа 56 минут и 4 секунды), сделает за сутки целый оборот (так же, с запада на восток) и дополнительно повернется на угол

$$\lambda_E = 360^\circ \frac{t - T_E}{T_E} = 0.986^\circ.$$

В итоге, через 24 часа Луна окажется в верхней кульминации на другом меридиане Земли, смещенном к востоку на величину

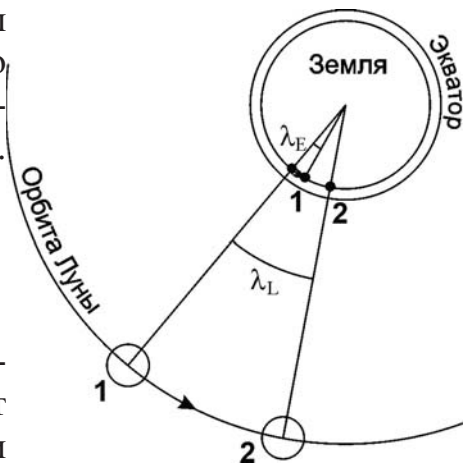
$$\lambda_L - \lambda_E = 12.2^\circ = 0.213 \text{ радиан.}$$

Поезд движется на восток, а верхняя кульминация Луны наблюдается один раз в сутки. Поэтому мы можем не рассматривать случаи совершения поездом более одного оборота вокруг оси Земли за день. Длина окружности параллели Земли с широтой φ равна $R \cos \varphi$, где R – радиус Земли. Путь, который прошел поезд, составляет

$$L = vt = R \cos \varphi (\lambda_L - \lambda_E).$$

Отсюда

$$\varphi = \pm \arccos \frac{vt}{R \cdot (\lambda_L - \lambda_E)} = \pm 28^\circ.$$



разные стороны от него, угловое расстояние между ними можно вычислить по теореме Пифагора:

$$d = \sqrt{(\alpha - \alpha_0)^2 + (\delta - \delta_0)^2} = 20^\circ.$$

Эта величина больше 12° , поэтому Мира Кита может быть видна хотя бы где-нибудь на Земле. Угол между направлением на зенит и линией "Солнце – Мира Кита" равен

$$\eta = \arccos \frac{h}{d} = 53^\circ.$$

Учитывая, что картина наблюдается вблизи экватора, угол между линией "Солнце – Мира Кита" и экватором можно вычислить как

$$\theta = \arctg \frac{\delta_0 - \delta}{\alpha - \alpha_0} = 33^\circ.$$

Угол между направлением на зенит и экватором равен

$$\varphi = \eta - \theta = 20^\circ.$$

Это и есть максимальная северная широта, где Мира Кита может быть видна при погружении Солнца под горизонт не менее 12° .

IX. 3 ТРАНЗИТ ДЛИНОЮ В ДЕНЬ

О.С. Угольников

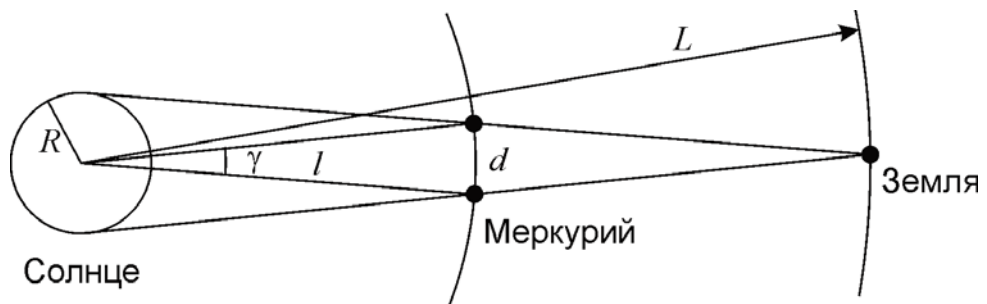
? При наблюдении из некоторого пункта в России прохождение Меркурия по диску Солнца началось на восходе Солнца, а закончилось на его заходе. В какой месяц года это произошло? Орбиту Меркурия считать круговой.

! Определим, какую продолжительность могут иметь прохождения Меркурия по диску Солнца. Для простоты будем считать размеры Меркурия и Земли много меньшими размеров Солнца. Перейдем в систему отсчета, вращающуюся вокруг Солнца вместе с Землей. В этой системе Меркурий будет обращаться вокруг Солнца с синодическим периодом S . По ходу прохождения Меркурий преодолевает расстояние d , равное

$$d = \frac{2R \cdot (L - l)}{L}.$$

Здесь R – радиус Солнца, l и L – расстояния от Солнца до Меркурия и Земли. Дуга, которую при этом Меркурий пройдет по орбите (в данной системе), составляет

$$\gamma = \frac{d}{l} = \frac{2R \cdot (L - l)}{Ll}.$$



Продолжительность центрального прохождения Меркурия по диску Солнца составит

$$t = \frac{S \cdot \gamma}{2\pi} = \frac{S \cdot R \cdot (L - l)}{\pi L l} = 6.5 \text{ час.}$$

Это существенно меньше 12 часов. Даже если мы учтем эллиптичность орбиты Меркурия, это не изменит ситуацию. Как известно, прохождение Меркурия по диску Солнца может наступить только вблизи двух узлов его орбиты в мае и ноябре. Из этих двух месяцев, столь коротким световой день в России может быть только в ноябре.

Ситуация, близкая к описанной в условии задачи, случится 13 ноября 2032 года на востоке Мурманской области России. Данное прохождение Меркурия не будет центральным и продлится еще меньше: около 4.5 часов.

IX. 4 НАВИГАЦИЯ В ДРЕВНЕМ МИРЕ

Е.Н. Фадеев

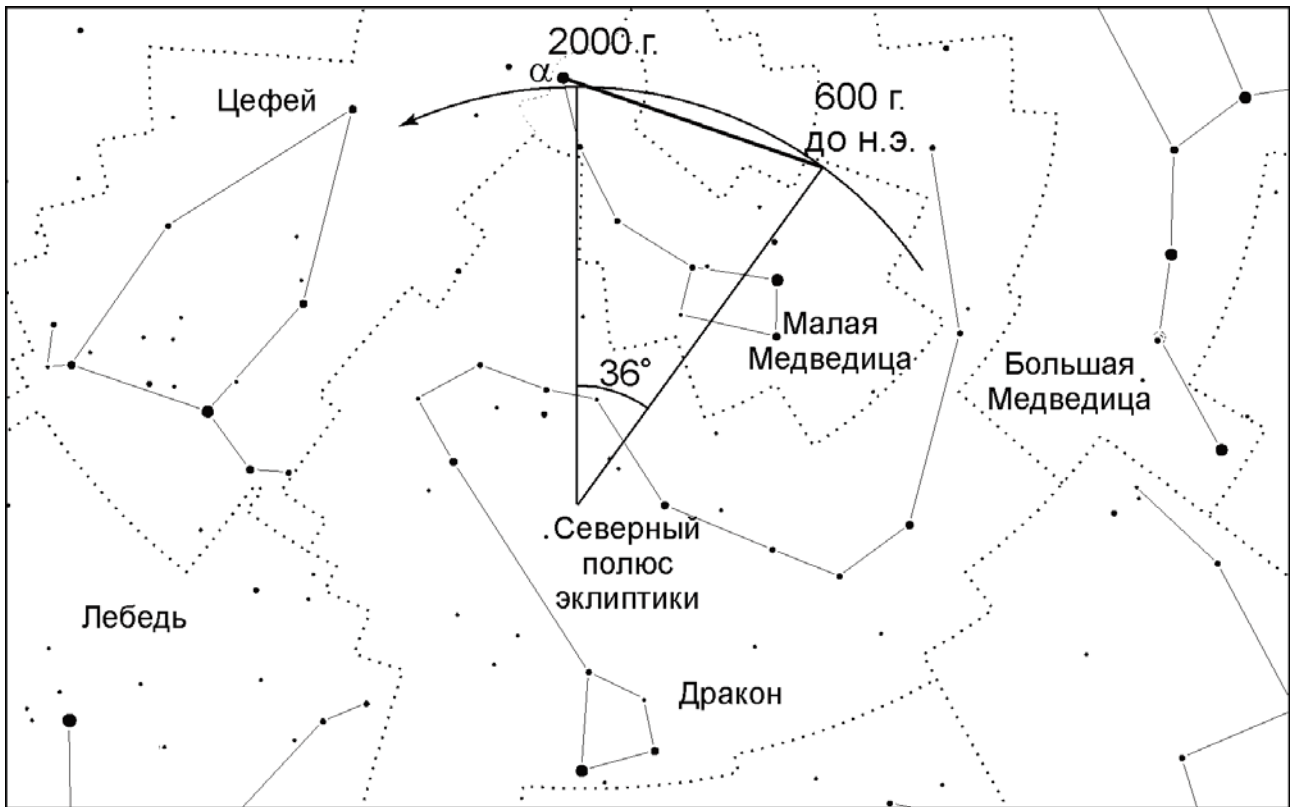
? На сколько градусов отстояла от северного полюса мира звезда α Малой Медведицы во времена плавания финикийцев вокруг Африки (около 600 г. до н. э.)?

! В данный момент α Малой Медведицы, или Полярная звезда, располагается менее чем в 1° от северного полюса мира. Собственное движение Полярной очень мало и на решение задачи не влияет. Единственное явление, значимо меняющее положение Полярной звезды относительно полюса мира – это прецессия земной оси.

В результате явления прецессии северный полюс мира движется среди звезд по малому кругу на расстоянии $\varepsilon = 23.4^\circ$ от полюса эклиптики с периодом, примерно равным 26000 лет. Плавание финикийцев состоялось 2600 лет назад, что составляет 1/10 от периода прецессии. За это время полюс мира переместился на 36° по эклиптической долготе. Данная величина измеряется вдоль эклиптики, а полюс мира находится на угловом расстоянии $90^\circ - \varepsilon = 66.6^\circ$ от нее. Поэтому длина дуги малого круга, по которой за 2600 лет переместился полюс мира, равна

$$\gamma = 36^\circ \cos 66.6^\circ \approx 14^\circ.$$

Расстояние на сфере измеряется вдоль дуг больших кругов, а мы нашли длину малого круга. Но, поскольку искомая величина, как и сама дуга, невелика, разли-



чие между длиной дуг большого и малого кругов мало, и наше приближение верно. Воспользовавшись формулами сферической тригонометрии, мы можем уточнить наше значение лишь на доли градуса.

Тот факт, что Полярная не совпадает с полюсом мира, а находится на некотором расстоянии от него, также особо не влияет на решение задачи, поскольку это расстояние в 10 с лишним раз меньше найденной величины.

IX. 5 ЧЕТЫРЕ ЗВЕЗДЫ

О.С. Угольников

? Звезды 1, 2, 3 и 4 имеют видимый блеск ровно 1^m , 2^m , 3^m и 4^m соответственно. Расстояния до них составляют ровно 1, 2, 3 и 4 пк. Расположите эти звезды в порядке убывания светимости. Межзвездным поглощением света пренебречь.

! Так как нас интересует соотношение светимостей звезд, мы можем использовать относительные величины. Обозначим яркость звезды 0^m за единицу. Тогда яркость звезды с величиной m будет равна

$$J_m = \frac{1}{2.512^m}.$$

Видимая яркость обратно пропорциональна квадрату расстояния до звезды. Поэтому светимость звезды пропорциональна видимой яркости, умноженной на квадрат расстояния:

$$B \sim \frac{r^2}{2.512^m}.$$

Звезда	B_m
1	0.398
2	0.634
3	0.568
4	0.402

В нашем случае для четырех звезд r (пк) = m , и для выяснения соотношения светимостей нужно рассчитать значения

$$B_m = \frac{m^2}{2.512^m}.$$

Занесем результаты в таблицу (справа). Мы видим, что светимость самая высокая у звезды 2, затем идут звезды 3, 4 и, наконец, 1.

IX. 6

ЗВЕЗДНЫЙ ДОМ

А.Н. Акинъщиков

? Наша Галактика состоит из 100 миллиардов звезд, большая часть которых расположена в диске радиусом 20 кпк и толщиной 500 пк. Считая, что физические двойные системы могут существовать, если расстояние между компонентами не больше 1/10 от среднего расстояния между соседними звездами в диске Галактики, определите максимальное расстояние до физической пары, разрешимой невооруженным глазом. Считать распределение звезд в диске Галактики равномерным.

! Определим концентрацию звезд в диске Галактики:

$$n = \frac{N}{\pi R^2 d} = 0.16 \text{ пк}^{-3}.$$

Здесь N – число звезд в Галактике, R – радиус ее диска, d – его толщина. Среднее расстояние между звездами равно

$$l = n^{-1/3} = 1.8 \text{ пк}.$$

Получается, что максимальное расстояние между компонентами двойной системы составляет 0.18 пк. Угловое разрешение человеческого глаза равно 1' (0.0003 радиан), поэтому максимальное расстояние до двойной системы есть

$$0.18/0.0003 = 600 \text{ пк}.$$

Яркие звезды-гиганты вполне могут быть заметны глазом с такого расстояния.