

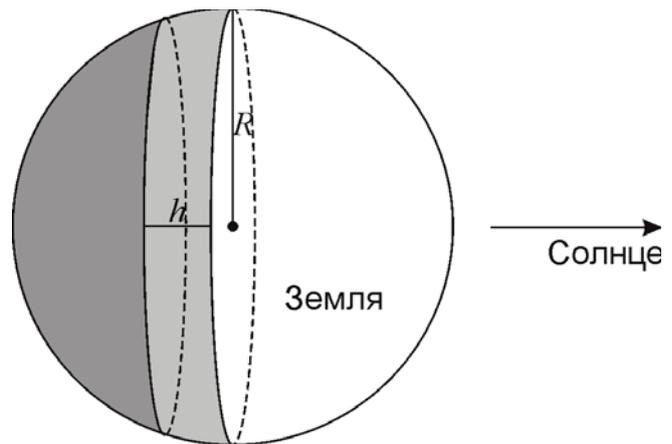
XI. 1 СУМЕРКИ

Е.Н. Фадеев

? Определите, на какой части поверхности Земли сейчас наблюдаются сумерки (в любой их стадии)? Угловыми размерами Солнца и рефракцией пренебречь. Решение дополните рисунком.

! По определению, сумерки продолжаются, пока Солнце находится в пределах высот от 0° до -18° . Будем считать Землю шаром. Тогда сумерки наблюдаются на сферической части поверхности шарового слоя, заключенного между полушарием, где в данный момент день, и сегментом, где ночь. Высота этого шарового слоя равна

$$h = R \sin 18^\circ.$$



Площадь сферической поверхности шарового слоя равна $2\pi Rh$. Сравнивая её с площадью всего земного шара, получаем величину части, погруженной в сумерки:

$$S_T = \frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{\sin 18^\circ}{2} \approx 0.15.$$

Площадь поверхности шарового сегмента может быть оценена, если мы заменим сегмент, например, цилиндром или усеченным конусом. В случае цилиндра ответ получается фактически таким же, поскольку площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по той же формуле, что и площадь сферической части шарового слоя.

XI. 2 ЗВЕЗДА НА МАТОВОМ СТЕКЛЕ

О.С. Угольников

? Телескоп-рефрактор с относительным отверстием 1:5 и прямой каркасной трубой навели на звезду 0^m . Затем с него сняли окуляр и поставили в фокальную плоскость матовую стеклянную пластинку. Какую звездную величину будет иметь изображение звезды на пластинке, если наблюдатель находится рядом с объективом (сбоку от него, не затеняя ход лучей звезды в телескопе)? Считать, что матовое стекло рассеивает весь свет в обе стороны от себя, причем равномерно во всех направлениях.

! Обозначим поток энергии от звезды через J . Количество энергии, которое за единицу времени попадет в телескоп с диаметром объектива D и соберется в изображении звезды в фокальной плоскости, составит

$$E = J \frac{\pi D^2}{4}.$$

Матовое стекло отразит этот свет равномерно во всех направлениях. Если наблюдатель находится рядом с объективом, на фокусном расстоянии F от пластинки, то поток энергии от изображения звезды около него будет равен

$$j = \frac{E}{4\pi F^2} = \frac{J}{16} \left(\frac{D}{F}\right)^2.$$

Диаметр объектива D и его фокусное расстояние F неизвестны, но задано их отношение, равное 1:5. Звездная величина изображения звезды с блеском m_0 на матовом стекле будет равна

$$m = m_0 - 2.5 \lg \frac{j}{J} = m_0 - 5 \lg \frac{D}{4F} = m_0 - 5 \lg \frac{1}{20} = 6.5.$$

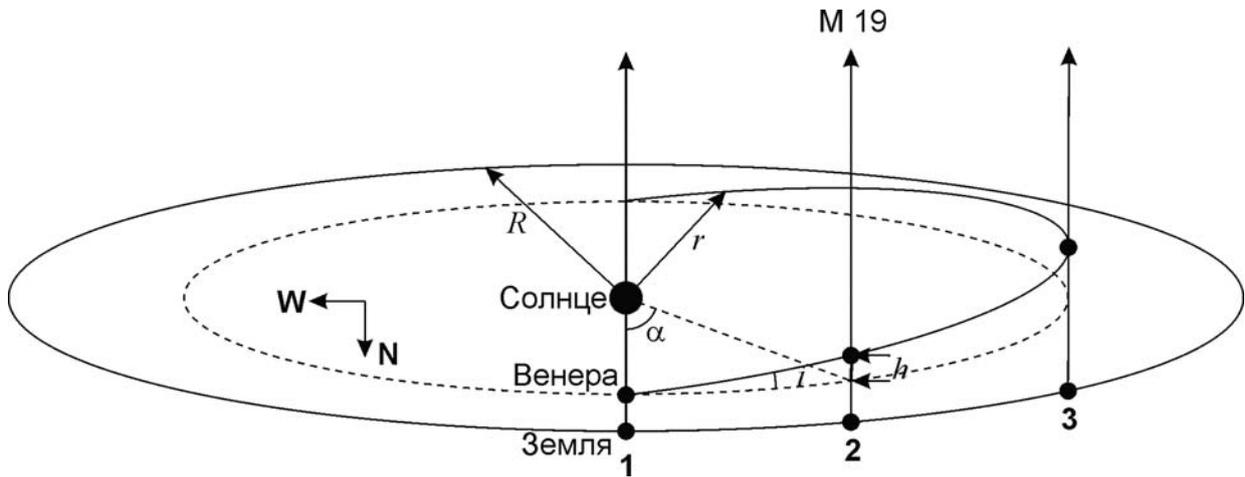
XI. 3 ПЛАНЕТА И СКОПЛЕНИЕ

О.С. Угольников

? Орбита планеты Венера наклонена к плоскости эклиптики на угол 3.4° , долгота восходящего узла равна 77° . Шаровое звездное скопление М19 в созвездии Змееносца имеет эклиптические координаты: долгота 257° , широта -3.5° , угловой диаметр $14'$. Может ли Венера (при наблюдении с Земли) пройти по этому скоплению? Орбиты планет считать круговыми.

! Близость угла наклона орбиты Венеры к эклиптике и эклиптической широты скопления (по модулю) может наводить на мысль, что планета может в пределе пройти по скоплению, находясь на максимальном удалении от эклиптики. Однако, реальная ситуация сложнее, и для решения задачи нам необходимо учесть ориентацию орбиты Венеры в пространстве.

Известно, что в нижнем соединении, находясь на минимальном расстоянии от Земли, Венера может удаляться на небе на 8° от эклиптики. Но заметим, что эклиптическая долгота скопления на 180° отличается от долготы восходящего узла орбиты Венеры. То есть, если бы Венера и Земля одновременно оказались на гелиоцентрической долготы 77° (такое могло бы случиться в нижнем соединении в начале декабря), то мы бы стали свидетелями прохождения Венеры по диску Солнца, а скопление М19 оказалось позади Солнца и Венеры, находясь в 3.5° южнее них на небе. В этом случае говорить о возможном прохождении Венеры по скоплению не приходится. Рассмотрим другие возможные взаимные положения Венеры и Земли, при которых Венера окажется на небе рядом со скоплением (на той же эклиптической долготы). Для этого изобразим орбиты обеих планет, при-



чем расположим сверху рисунка южный полюс эклиптики (так как скопление имеет отрицательную эклиптическую широту). Очевидно, что нас будет интересовать южная (по отношению к эклиптике) половина орбиты Венеры, так как именно на ней планета может подойти к М19 при наблюдении с Земли.

Так как угол наклона орбиты Венеры к эклиптике невелик, то проекцию орбиты на плоскость эклиптики можно считать окружностью с тем же радиусом. Пусть Земля и Венера находятся в каком-либо из положений 1, 2 или 3 так, что проекция отрезка между ними параллельна линии узлов орбиты. Продолжение этого отрезка за Венеру указывает на точку эклиптики с долготой 257° , находящуюся рядом с шаровым скоплением. Пусть Венера отстоит от узла орбиты на угол α . Тогда ее расстояние от плоскости эклиптики составит

$$h = r i \sin \alpha.$$

Здесь r – радиус орбиты Венеры, i – угол ее наклона к эклиптике, выраженный в радианах, мы вновь учли малость этого угла. Теперь определим расстояние между Землей и проекцией Венеры на плоскость эклиптики, для чего построим рисунок в плоскости эклиптики (вновь со стороны юга, внизу страницы).

В треугольнике «Солнце-Венера-Земля» нам известны две стороны и угол, не лежащий между ними (с вершиной в проекции Венеры, он равен $\pi - \alpha$). Запишем выражение теоремы косинусов:

$$R^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos(\pi - \alpha) = r^2 + d^2 + 2rd \cos \alpha.$$

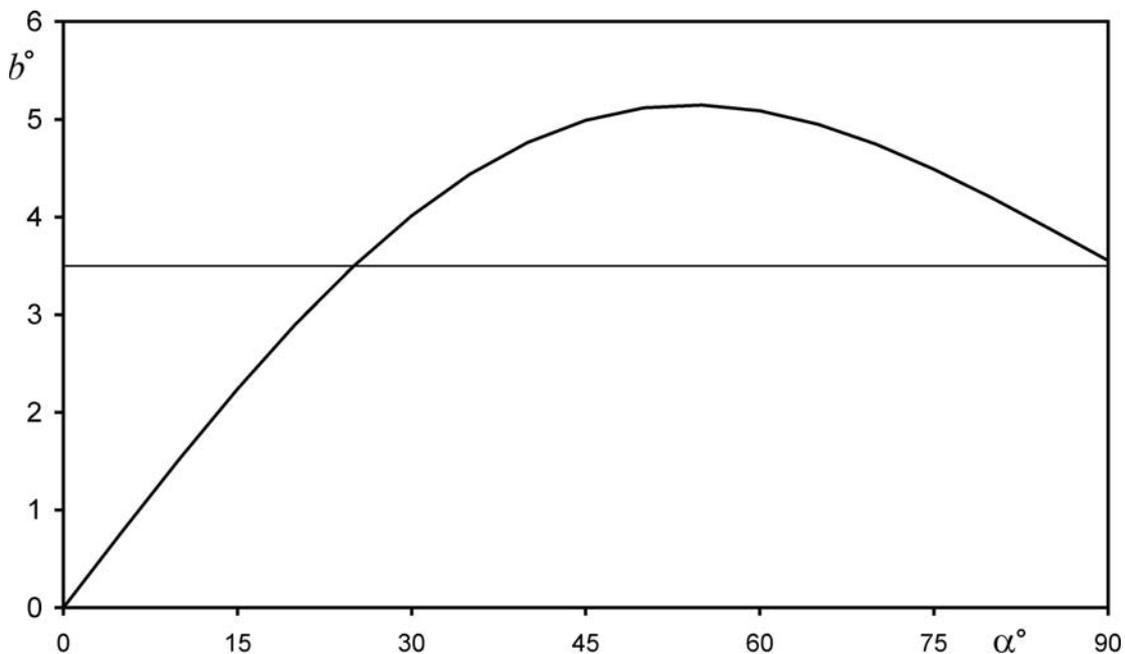
Это квадратное уравнение имеет один положительный корень:

$$d = -r \cos \alpha + \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha - r^2 + R^2} = \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - r \cos \alpha.$$

Модуль эклиптической широты Венеры при наблюдении с Земли составит

$$b = \frac{h}{d} = \frac{r i \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} - r \cos \alpha}.$$





Можно построить график величины b для углов α от 0° до 90° (то есть для положений Венеры между нижним соединением и наибольшей восточной элонгацией).

Подробный анализ (не требующийся от участников олимпиады) показывает, что максимальная (по модулю) эклиптическая широта Венеры в этой области неба будет достигнута при

$$\alpha = \arccos \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}} \approx 54^\circ$$

и составит

$$b_0 = \frac{irR}{R^2 - r^2} \approx 5.1^\circ.$$

Мы видим, что величина b может значительно превосходить по модулю эклиптическую широту скопления М19, и Венера может пройти по этому скоплению.

Приведенное выше решение является полным. Однако ответить на вопрос касательно конкретного скопления М19 можно проще. Для этого достаточно рассмотреть только случай наибольшей восточной элонгации (положение 3 на рисунке слева сверху). Тогда угол α равен 90° , расстояние между Землей и Венерой вычисляется по теореме Пифагора:

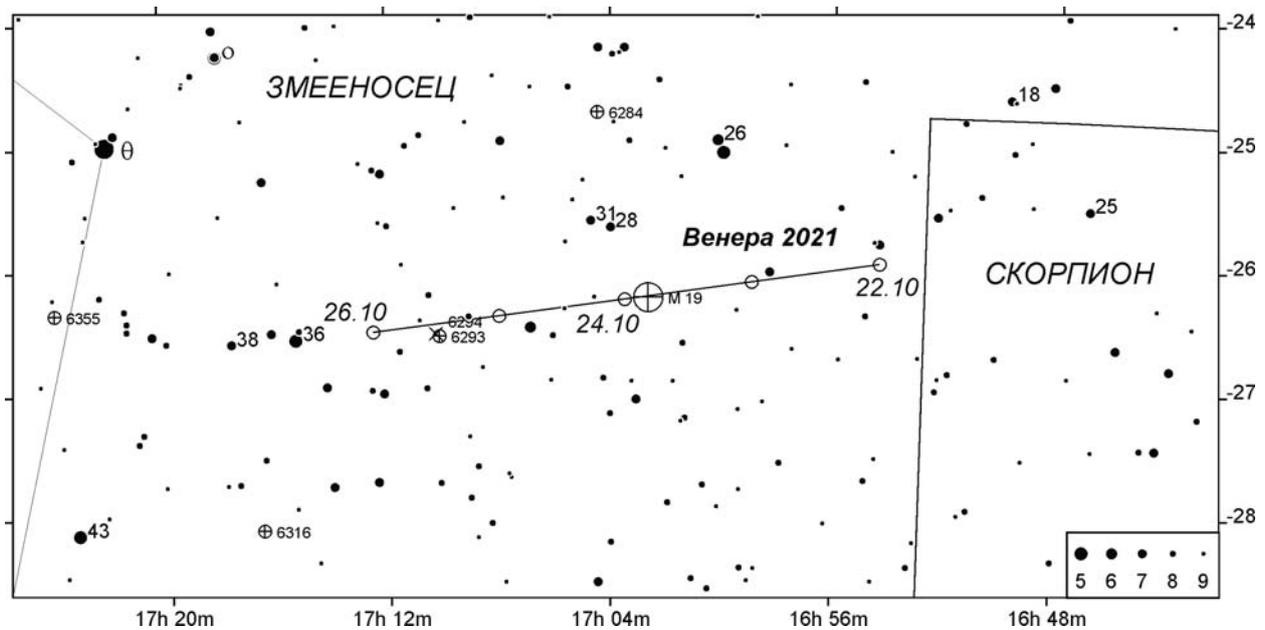
$$d = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Модуль эклиптической широты Венеры будет равен

$$b = \frac{h}{d} = \frac{ri}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 3.55^\circ.$$

Учитывая угловой размер скопления (около 0.2°) сразу делаем вывод, что в случае наибольшей восточной элонга-





ции на данной эклиптической долготе (это соответствует 20-м числам октября) прохождение Венеры по М19 обязательно произойдет. Более того, именно сейчас такие явления случаются регулярно. Венера прошла по краю М19 23 октября 2013 года, а еще через 8 лет, вечером 23 октября 2021 года, пройдет по его центру.

XI. 4 МЕЖПЛАНЕТНЫЙ ПАРУСНИК

О.С. Угольников

? Космический аппарат вывели на круговую околосолнечную орбиту с радиусом 1 а.е. После этого на нем был развернут солнечный парус, постоянно обращенный к Солнцу и уменьшающий эффективную силу его притяжения на 4%. В ходе дальнейшего движения этот парус мгновенно сворачивался, как только аппарат достигал афелия своей текущей орбиты, но вновь раскрывался в каждом перигелии. Сколько целых оборотов вокруг Солнца сделает этот аппарат? Какова его дальнейшая судьба? Взаимодействием аппарата со всеми телами, кроме Солнца и его фотонов, пренебречь.

! Как известно, сила фотонного давления на солнечный парус, как и сила притяжения Солнца, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до него. Поэтому отношение двух сил при постоянной ориентации паруса к Солнцу будет постоянно, и эффективная сила притяжения при раскрытом парусе будет всегда составлять 24/25 от истинной силы притяжения Солнца.

Пусть после n оборотов, на каждом из которых парус сначала разворачивался в перигелии, а затем сворачивался в афелии, аппарат движется по орбите с большой полуосью a_n и эксцентриситетом e_n (до первого раскрытия паруса $a_0=1$ а.е. и $e_0=0$). В точке перигелия расстояние аппарата от Солнца и его скорость составят

$$r_n = a_n (1 - e_n);$$

Теоретический тур – 11 класс

$$V_n = \sqrt{\frac{GM}{a_n} \cdot \frac{1+e_n}{1-e_n}} = \sqrt{\frac{GM}{r_n} \cdot (1+e_n)}.$$

В данной точке аппарат раскрывает парус, и его дальнейшее движение будет таким же, как оно было бы в поле тяжести звезды с массой $24M/25$ (M – масса Солнца). Очевидно, что данная точка будет перигелием и этой орбиты. Для новых параметров орбиты A_{n+1} и E_{n+1} справедливы соотношения:

$$r_n = A_{n+1} (1 - E_{n+1});$$

$$V_n = \sqrt{\frac{24GM}{25A_{n+1}} \cdot \frac{1+E_{n+1}}{1-E_{n+1}}} = \sqrt{\frac{24GM}{25r_n} \cdot (1+E_{n+1})}.$$

Сопоставляя все формулы, мы получаем:

$$\frac{24}{25} \cdot (1 + E_{n+1}) = 1 + e_n; \quad E_{n+1} = \frac{25e_n + 1}{24}.$$

По новой траектории аппарату предстоит сделать половину оборота. Когда он достигнет афелия, его расстояние от Солнца и скорость будут равны:

$$R_{n+1} = A_{n+1} (1 + E_{n+1});$$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{24GM}{25A_{n+1}} \cdot \frac{1-E_{n+1}}{1+E_{n+1}}} = \sqrt{\frac{24GM}{25R_{n+1}} \cdot (1-E_{n+1})}.$$

В афелии парус сворачивается, и аппарат оказывается в обычном поле тяжести Солнца на орбите с большой полуосью a_{n+1} и эксцентриситетом e_{n+1} . Для них справедливы соотношения:

$$R_{n+1} = a_{n+1}(1+e_{n+1});$$

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{GM}{a_{n+1}} \cdot \frac{1-e_{n+1}}{1+e_{n+1}}} = \sqrt{\frac{GM}{R_{n+1}} \cdot (1-e_{n+1})}.$$

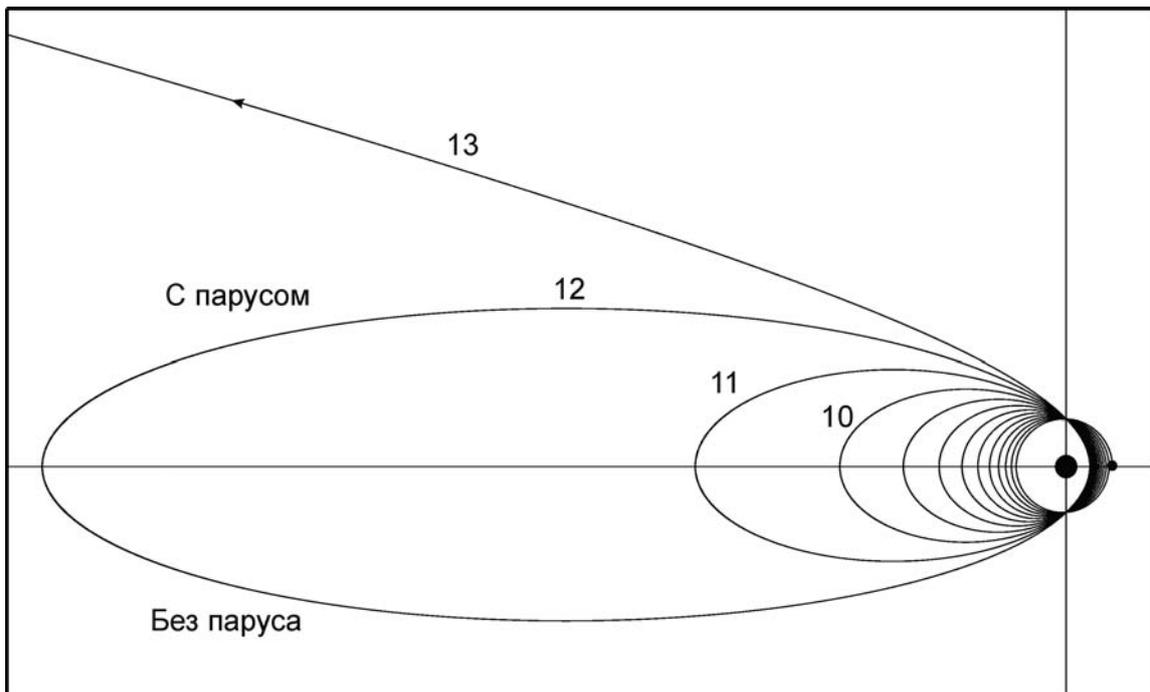
Отсюда мы можем получить:

$$\frac{24}{25} \cdot (1 - E_{n+1}) = 1 - e_{n+1}; \quad e_{n+1} = \frac{24E_{n+1} + 1}{25} = \frac{25e_n + 2}{25} = e_n + \frac{2}{25} = e_n + 0.08.$$

Приращение эксцентриситета постоянно и не зависит от номера витка. С учетом $e_0=0$, для траектории без паруса на витке n мы имеем: $e_n=2n/25$. Для витка с раскрытым парусом

$$E_n = \frac{25e_{n-1} + 1}{24} = \frac{2n-1}{24}.$$

Аппарат сделает 12 полных оборотов вокруг Солнца с периодически раскрывающимся парусом. 13-й виток уже не будет замкнутым, так как представит из себя гиперболу с эксцентриситетом $E_{13}=25/24 \sim 1.04$. Раскрыв парус в 13-й раз, аппарат покинет Солнечную систему.



В задаче можно учитывать эффект Пойнтинга-Робертсона, связанный с тормозящим ускорением от боковых фотонов на движущийся аппарат. Однако он будет очень мал, и уменьшение эксцентриситета на 13-м витке составит примерно 0.0002. Траектория все равно будет гиперболической.

Нужно также отметить, что с каждым новым витком у аппарата будет уменьшаться перигелийное расстояние. Однако, это не создаст проблем для его работы, так как расстояние в перигелии останется значительно больше радиуса Солнца. Чтобы доказать это, рассмотрим моменты перед раскрытием паруса в перигелии на i -том витке и запишем формулировку закона сохранения момента импульса (который, безусловно, выполняется для аппарата, так как сила фотонного давления центральная и не создает вращательного момента):

$$mV_i r_i = mV_0 a_0;$$

$$\sqrt{\frac{GM}{r_i}} (1 + e_i) \cdot r_i = \sqrt{\frac{GM}{a_0}} \cdot a_0.$$

Здесь m – масса аппарата. Отсюда можно записать выражение для перигелийного расстояния:

$$r_i = \frac{a_0}{1 + e_i}.$$

На всех участках витков со свернутым парусом эксцентриситет не превышает единицу, и перигелийные расстояния будут не меньше 0.5 а.е, то есть аппарат будет всегда дальше от Солнца, чем Меркурий.

Описанный маневр является возможным средством разгона тел с фотонными парусами в поле тяжести звезд. Его суть в чем-то аналогична взмаху крыла птицы и состоит в том, что парус раскрыт, когда аппарат удаляется от Солнца. Тем самым, фотоны сообщают ему ускорение по ходу движения и совершают положительную работу. На другой половине витка парус сворачивается, и фотоны не оказывают тормозящее действие.

XI. 5 ТАЙМИНГ ПУЛЬСАРА

Е.Н. Фадеев

? Радиопульсар в некоторый момент времени имеет точно известный период ровно в 1 с. Сколько после этого потребуется времени, чтобы обнаружить, что период этого радиопульсара растет со скоростью 10^{-15} ? Методы наблюдения позволяют определять время прихода импульса с точностью 10^{-3} с. Считать пульсар неподвижным относительно наблюдателя.

! Радиопульсар – это вращающаяся нейтронная звезда, излучающая по принципу маяка: один раз за оборот луч, в котором распространяется излучение, попадает на Землю. Энергия вращения постепенно расходуется на излучение, вследствие чего вращение пульсара постепенно замедляется.

На первый взгляд кажется, что правильный ответ можно найти, разделив величину измеряемой задержки сигнала (10^{-3} секунды) на скорость роста периода пульсара (10^{-15}). Получается 10^{12} секунд, что составляет почти 32 тыс. лет. Но это промежуток, за который сам период увеличивается на 10^{-3} секунды. Через такое время рост периода можно будет заметить, зарегистрировав всего два соседних импульса. В случае систематических наблюдений убедиться в замедлении пульсара можно будет существенно раньше.

Пусть P_0 – период радиопульсара в начальный момент времени, ω_0 – угловая скорость вращения пульсара в момент открытия, $\dot{\omega}$ и \dot{P} – скорость изменения периода и угловое ускорение соответственно, φ – угол поворота радиопульсара. Для этого угла можно записать уравнение:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\dot{\omega} t^2}{2}.$$

Поскольку мы считаем пульсар неподвижным относительно наблюдателя, разности времен испускания и получения двух импульсов равны. Поделив обе части уравнения на 2π , мы получим его аналог, в котором вместо угла φ будет стоять число оборотов k , а вместо угловой скорости ω и скорости ее изменения – частота ν и скорость ее изменения:

$$k = \nu_0 t + \frac{\dot{\nu} t^2}{2}.$$

Нам интересны моменты времени, соответствующие полным оборотам и целым значениям k . Пусть k – число оборотов вокруг своей оси, совершенных пульсаром начиная с момента, которому соответствует угловая скорость ω_0 . Тогда для определения времени прихода k -го импульса надо решить квадратное уравнение

$$t^2 + 2t \frac{\nu_0}{\dot{\nu}} - 2 \frac{k}{\dot{\nu}} = 0.$$

Решением этого уравнения будет

$$t_{k1,2} = -\frac{v_0}{\dot{v}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{\dot{v}}\right)^2 + \frac{2k}{\dot{v}}}.$$

Решение со знаком “–” отрицательно, и мы его не рассматриваем. Если бы пульсар не замедлялся, то время прихода k -го импульса определялось бы как

$$t_{k0} = \frac{k}{v_0}.$$

В итоге, временная задержка прихода k -го импульса составит:

$$\Delta t_k = t_{k1} - t_{k0} = -\frac{v_0}{\dot{v}} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{\dot{v}}\right)^2 + \frac{2k}{\dot{v}}} - \frac{k}{v_0}.$$

Это уравнение можно путем несложных преобразований свести к квадратному относительно k :

$$k^2 + 2v_0\Delta t_k \cdot k + (v_0\Delta t_k)^2 + 2\frac{v_0^3}{\dot{v}}\Delta t_k = 0.$$

Решив это уравнение, получаем

$$k = -v_0\Delta t_k \pm \sqrt{-2\frac{v_0^3}{\dot{v}}\Delta t_k}.$$

Знак “–” под корнем не должен смущать, поскольку пульсар тормозится, и величина \dot{v} отрицательна. Второе решение вновь не имеет физического смысла, поэтому мы его рассматривать не будем. Переходя от частот к периодам с учетом $P_0 = v_0^{-1}$, имеем:

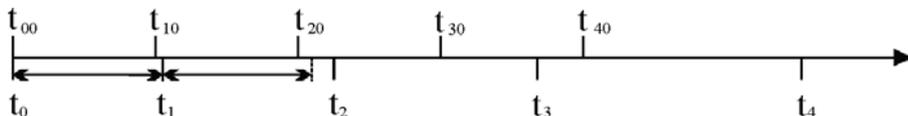
$$\dot{P} = \frac{P_1 - P_0}{\Delta t_1} = \frac{v_1^{-1} - v_0^{-1}}{\Delta t_1} = \frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1 \Delta t_1} \approx -\frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{1}{v_0^2} = -\frac{\dot{v}}{v_0^2}.$$

Для заданной величины временной задержки Δt_k получаем число k :

$$k = -\frac{\Delta t_k}{P_0} + \sqrt{2\frac{\Delta t_k}{P_0 \dot{P}}} \approx \sqrt{2\frac{\Delta t_k}{P_0 \dot{P}}} = 1.4 \cdot 10^6.$$

Таким образом, обнаружить изменение периода пульсара можно через $1.4 \cdot 10^6$ импульсов, что составляет немногим более 16 дней.

Эту задачу можно решить и другими способами. Рассмотрим, например, как меняются моменты прихода импульсов из-за увеличения периода. Каждый раз новый импульс приходит чуть позже, чем ему следовало бы в случае постоянного периода. Вклад в разницу вносит задержка импульса не только в течение последнего периода, но и всего времени, накопленного в ходе наблюдений начиная с момента t_0 . Именно поэтому мы замечаем изменение периода гораздо раньше, чем период сам изменится на требуемую величину.



Пусть, как и раньше, t_k обозначает время прихода k -го импульса. Будем считать $t_0=0$. Тогда первый импульс придет в момент времени

$$t_1 = P_0 + \Delta P_1,$$

второй импульс – в момент

$$t_2 = t_1 + (t_1 + \Delta P_2) = 2P_0 + 2\Delta P_1 + \Delta P_2,$$

третий импульс – в момент

$$t_3 = t_2 + (t_2 + \Delta P_3) = 3P_0 + 3\Delta P_1 + 2\Delta P_2 + \Delta P_3$$

и так далее. Величины ΔP_k – это разницы периодов в моменты t_k и t_{k-1} . Строго говоря, они различны, но, в силу ничтожности различия в периодах в моменты приходов соседних импульсов, их можно считать равными. Тогда формула для момента прихода k -го импульса упрощается:

$$t_k = kP_0 + \Delta P \sum_{n=1}^k n = kP_0 + \frac{k+1}{2} k \Delta P \approx kP_0 + \frac{k^2}{2} \Delta P.$$

Задержка момента прихода есть

$$\Delta t_k = t_k - kP_0 = \frac{k^2}{2} \Delta P.$$

Задав требуемую задержку, получаем величину k :

$$k = \sqrt{\frac{2\Delta t_k}{\Delta P}} = \sqrt{\frac{2\Delta t_k}{P_0 \dot{P}}},$$

что совпадает с полученным ранее соотношением.

XI. 6 ХОЛОДНОЕ ОБЛАКО

Н.Н. Шахворостова

? Межзвездное облако состоит из молекулярного водорода (H_2) и пыли и имеет форму шара с однородным внутренним распределением массы. Блеск далеких звезд, расположенных за центром облака, ослаблен на 1^m . При каком радиусе это облако начнет сжиматься под действием собственного тяготения, если его температура составляет 20К? Массовое соотношение газа и пыли в облаке постоянно и равно 100:1, черные пылинки имеют радиус 0.5 мкм, плотность 1 г/см³ и ослабляют свет по законам геометрической оптики.

! Основу массы облака составляет газ, прозрачный для излучения. Ослабление света происходит на пылевых частицах. Пусть J_0 и J – величины потока излучения, входящего в облако и выходящего из него. Если облако только поглощает излучение и не излучает само, то эти величины связаны уравнением

$$J = J_0 e^{-\tau},$$

XXII Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

где τ – оптическая толщина облака, которую можно трактовать как число частиц на пути луча света. Из закона Погсона известно, что

$$J = J_0 10^{0.4(m_0 - m)}.$$

Сравнивая эти выражения и принимая во внимание, что блеск звезд за облаком ослаблен на 1^m , получаем, что среднее число частиц на пути света равно

$$\tau = \ln 2.512 \sim 1.$$

Обозначив радиус пылинок как r , а радиус облака через R , записываем выражение

$$2R n \pi r^2 = \tau.$$

Здесь n – концентрация пылевых частиц. Отсюда мы выражаем массовую плотность пыли в облаке ρ_D и полную плотность ρ :

$$\rho_D = n \cdot \frac{4}{3} \rho_0 \pi r^3; \quad \rho = K \rho_D = \frac{2K\tau\rho_0 r}{3R}.$$

Здесь ρ_0 – плотность одной пылинки, K – соотношение массы газа и пыли в облаке (учитываем, что оно значительно больше единицы). Запишем формулу для круговой (первой космической) скорости на краю облака:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} \cdot R = \sqrt{\frac{8\pi GK\tau\rho_0 r R}{9}}.$$

Коэффициент $8/9$ близок к единице, и в дальнейших расчетах мы его опускаем. Облако перестанет быть устойчивым и начнет сжиматься, если характерные скорости частиц (молекул газа) станут меньше первой космической скорости. Среднеквадратичная скорость частицы равна

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3\mathfrak{R}T}{\mu}}.$$

Здесь m – масса молекулы водорода, μ – молярная масса, k – постоянная Больцмана, \mathfrak{R} – универсальная газовая постоянная, T – температура. Отсюда получаем выражение для радиуса:

$$R \geq \frac{3\mathfrak{R}T}{\pi G\mu K\tau\rho_0 r} \approx \frac{\mathfrak{R}T}{G\mu K\tau\rho_0 r} = 2.5 \cdot 10^{16} \text{ м} \approx 0.8 \text{ пк}$$