Условие

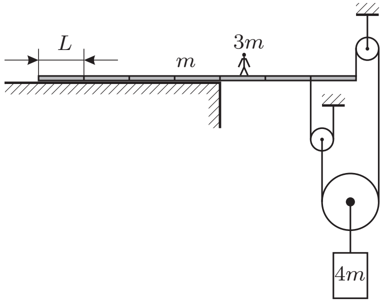

Рис. 1

Доска массой m лежит, выступая на 3/7 своей длины, на краю обрыва. Длина одной седьмой части доски $L = 1$ м. К свисающему краю доски с помощью невесомых блоков и нитей (рис. 1) прикреплен противовес, имеющий массу $4m$. На каком расстоянии от края обрыва на доске может стоять человек массой $3m$, чтобы доска оставалась горизонтальной?

Примерные критерии оценивания

Указаны все силы (кроме силы реакции опоры), действующие на доску, и их точки приложения 1

Найдены силы натяжения нитей 1

Указана точка приложения силы реакции опоры в случае, когда правый конец доски поднимается 1,5

Записано правило моментов для первого случая 1,5

Найдено расстояние x_1 1

Указана точка приложения силы реакции опоры в случае, когда правый конец доски опускается 1,5

Записано правило моментов для второго случая 1,5

Найдено расстояние x_2 1

Возможное решение

Из невесомости блоков и нитей, найдём связь между силами натяжения нитей (рис. 2). Заметим, что равновесие может нарушиться как при опрокидывании доски относительно края обрыва, так и при подъёме правого края вверх. Расставим силы, действующие на доску и в системе. Из условия равновесия нижнего блока $4T = 4mg$, или $T = mg$. Рассмотрим случай, когда доска опрокидывается влево (правый конец идёт вверх), тогда сила реакции опоры приложена к левому краю доски (N_1 на рис. 2). Запишем правило моментов для сил, приложенных к левому краю доски, относительно этой точки:

$$mg\frac{7L}{2} + 3mg(4L + x_1) + T \cdot 6L = 2T \cdot 7L, \quad \text{откуда} \quad x_1 = -\frac{5L}{2} < 0,$$

то есть человек может на 2,5 м зайти от края обрыва влево.

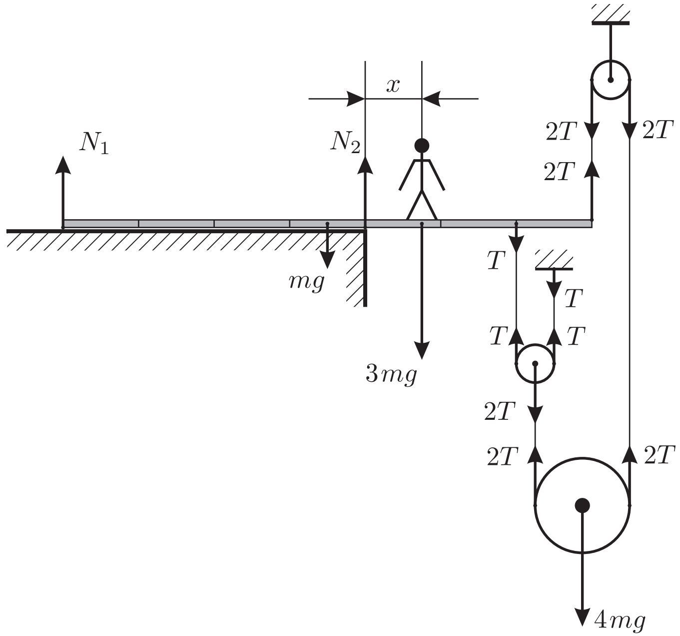

Рис. 2

Теперь рассмотрим случай, когда доска опрокидывается вправо (правый конец идёт вниз), тогда сила реакции опоры приложена к точке, находящейся на расстоянии $4L$ от левого края доски (N_2 на рис. 2). Запишем правило моментов для сил, приложенных к доске, относительно этой точки:

$$mg\frac{L}{2} + 2T \cdot 3L = 3mgx_2 + T \cdot 2L, \quad \text{откуда} \quad x_2 = \frac{3L}{2} > 0,$$

то есть человек может на 1,5 м выйти вправо за край обрыва. При нахождении человека между этими крайними точками система будет в равновесии, а сила реакции опоры N будет приложена где-то между рассмотренными крайними положениями.

Условие

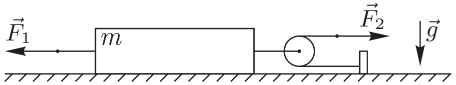

Рис. 3

К системе, приведённой на рисунке 3, прикладывают в указном направлении внешние силы F_1 и F_2, графики зависимости которых от времени даны на рис. 4 и рис. 5 соответственно. Масса бруска $m = 1$ кг, коэффициент трения между плоскостью и бруском $\mu = 0{,}4$, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Нити лёгкие, нерастяжимые и длинные. Блок невесомый. На какое расстояние переместится брусок за 10 секунд, если изначально он покоится?

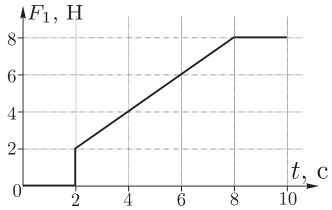

Рис. 4

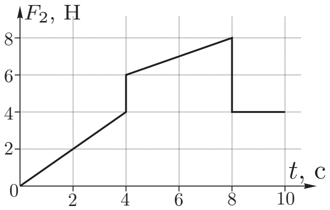

Рис. 5

Примерные критерии оценивания

Учтено, что подвижный блок увеличивает силу в 2 раза 1
Найдена максимально возможная сила трения покоя 1
Указано, что брусок сдвинется, когда $|F_x|$ превысит $F_{\text{тр}}$ 1
Найдено ускорение $a_{x,1}$ 1
Найдено ускорение $a_{x,2}$ 1
Описано изменение скорости в моменты времени $4 \div 8$ с 1
Описано изменение скорости в моменты времени $8 \div 10$ с 1
Найдено перемещение в моменты времени $4 \div 8$ с 1
Найдено перемещение в моменты времени $8 \div 10$ с 1
Получен ответ для перемещения 1

Возможное решение

Заметим, что подвижный блок увеличивает силу F_2 в два раза. Если направить ось x вправо, то проекция силы, действующей на брусок со стороны нитей, равна:

$$F_x = 2F_2 - F_1.$$

Построим график зависимости F_x от времени t (рис. 6).

Брусок сдвинется с места, когда суммарная внешняя сила превысит максимально возможную силу трения покоя, равную $F_{\text{тр}} = \mu mg = 4$ Н. Из графика видно (рис. 7), что движение начнётся в момент времени $t_0 = 4$ с. Брусок будет двигаться с постоянным ускорением: $a_{x,1} = (F_x - F_{\text{тр}})/m = 4$ м/с^2, пока в момент времени $t_1 = 8$ с нити не перестанут действовать на брусок. Скорость бруска в этот момент составит $v_{x,1} = a_{x,1}(t_1 - t_0) = 16$ м/с.

После $t_1 = 8$ с брусок будет двигаться только под действием силы трения с ускорением $a_{x,2} = -4$ м/с^2. При $t_2 = 10$ с скорость равна $v_{x,2} = v_{x,1} + a_{x,2}(t_2 - t_1) = 8$ м/с.

Перемещение Δx бруска есть площадь под графиком $v_x(t)$, поэтому удобно построить график (рис. 8). За 10 с брусок сместится на расстояние

$$\Delta x = 1/2 \cdot 16 \cdot 4 \text{ м} + 1/2 \cdot (16 + 8) \cdot 2 \text{ м} = 56 \text{ м}.$$

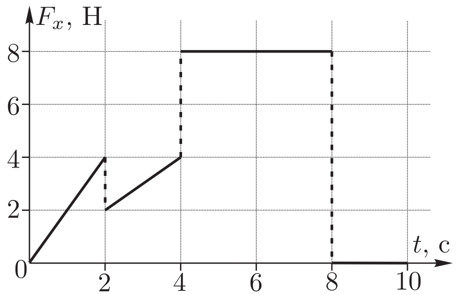

Рис. 6

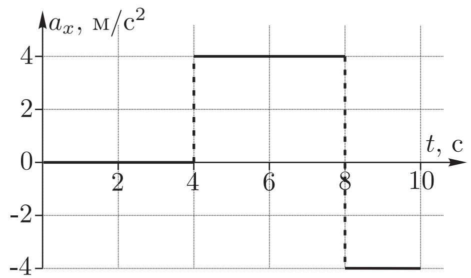

Рис. 7

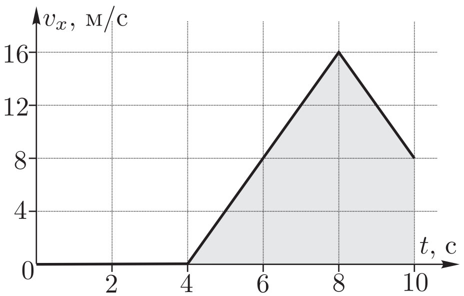

Рис. 8

Условие

Теплоизолированный сосуд был до краев наполнен водой при температуре $t_0 = 19°\text{C}$. В середину этого сосуда быстро, но аккуратно опустили деталь, изготовленную из металла плотностью $\rho_1 = 2700$ кг/м^3, нагретую до температуры $t_д = 99°\text{C}$, и закрыли крышкой. После установления теплового равновесия температура воды в сосуде равна $t_x = 32{,}2°\text{C}$. Затем в этот же сосуд, наполненный до краев водой при температуре $t_0 = 19°\text{C}$, вновь быстро, но аккуратно опустили две такие же детали, нагретые до той же температуры $t_д = 99°\text{C}$, и закрыли крышкой. В этом случае после установления в сосуде теплового равновесия температура воды равна $t_y = 48{,}8°\text{C}$. Чему равна удельная теплоемкость c_1 металла, из которого изготовлены детали? Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Удельная теплоемкость воды $c_0 = 4200$Дж/(кг $\cdot$ °C).

Примерные критерии оценивания

Учтено, что в первом случае оставшийся объём воды в сосуде $V_0 - V_1$ 1
Записано уравнение теплового баланса (1) 2
Учтено, что во втором случае оставшийся объём воды в сосуде $V_0 - 2V_1$ 1
Записано уравнение теплового баланса (2) 2
Получено выражение для теплоёмкости c_1 3
Получен численный ответ 1

Возможное решение

Пусть объем сосуда равен V_0, а объем детали, соответственно, V_1.

Запишем уравнения теплового баланса для первого и для второго случаев:

$$c_1\rho_1V_1(t_д - t_x) = c_0\rho_0(V_0 - V_1)(t_x - t_0), \tag{1}$$

$$c_1\rho_1 \cdot 2V_1(t_д - t_y) = c_0\rho_0(V_0 - 2V_1)(t_y - t_0). \tag{2}$$

Исключим из этой системы объем V_0. Для этого выразим в каждом уравнении величину $c_0\rho_0V_0$ и приравняем получившиеся выражения:

$$\frac{c_1\rho_1V_1(t_д - t_x) + c_0\rho_0V_1(t_x - t_0)}{t_x - t_0} = \frac{c_1\rho_1 \cdot 2V_1(t_д - t_y) + c_0\rho_0 \cdot 2V_1(t_y - t_0)}{t_y - t_0}$$

Объём V_1 сократится. После алгебраических преобразований получим ответ:

$$c_1 = c_0\frac{\rho_0}{\rho_1}\frac{1}{\left(\dfrac{t_д - t_x}{t_x - t_0} - 2\dfrac{t_д - t_y}{t_y - t_0}\right)} \approx 920 \text{ Дж/(кг} \cdot °\text{C)}.$$

Условие

На рис. 9 приведена блок-схема регулируемого источника постоянного тока. Идеальная батарея, обеспечивающая постоянное напряжение U_0, защищена от короткого замыкания резистором, сопротивление которого r. Выходное напряжение задается резистором сопротивлением R. К выходным разъемам A и B подключают нагрузку, сопротивление которой $R_{н}$.

Для упрощения расчета силы тока, текущего через нагрузку $R_{н}$, схему регулируемого источника принято представлять в виде эквивалентной схемы (рис. 10), обеспечивающей такую же силу тока, текущего через нагрузку, как и реальный источник (рис. 9) . Выразите напряжение U_1 и сопротивление r_1 эквивалентной схемы через параметры (U_0, R, и r) источника.

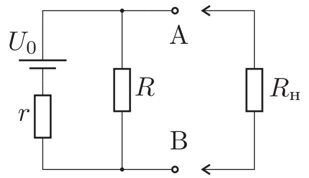

Рис. 9

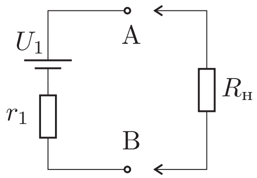

Рис. 10

Примерные критерии оценивания

Первое решение

Получено выражение (3), или любое другое выражение, связывающее напряжение или ток нагрузки с величиной, взятой в качестве параметра для исходной схемы 3

Получено выражение (4), или любое другое выражение, связывающее напряжение или ток нагрузки с величиной, взятой в качестве параметра для эквивалентной схемы 1

В работе присутствует идея, что при любых значениях параметра выражения (3) и (4) должны давать одинаковый результат 2

Указано, какие именно величины должны быть равны, чтобы при любых значениях параметра выражения (3) и (4) давали одинаковый результат 2

Найдено U_1 1

Найдено r_1 1

Второе решение

Указано, что при подключении вольтметра к разным схемам должно быть одинаковое значение напряжения 2

Найдено напряжение на U_1 2

Указано, что сила тока короткого замыкания одинакова 2

Найдена сила тока короткого замыкания для исходной схемы 1

Найдена сила тока короткого замыкания для эквивалентной схемы 1

Найдено сопротивление r_1 2

Возможное решение

Первое решение. Найдём напряжение U_{AB} на разъёмах регулируемого источника в зависимости от силы тока I, текущего через нагрузку (рис. 11):

$$U_{AB} = U_0 - I_0 r = I'R.$$

Учитывая, что $I_0 = I + I'$, можно выразить I':

$$U_0 - (I + I')r = I'R, \quad \text{откуда} \quad I' = \frac{U_0 - Ir}{R + r}.$$

Значит,

$$U_{AB} = I'R = U_0 \frac{R}{R + r} - I \frac{Rr}{R + r}. \tag{3}$$

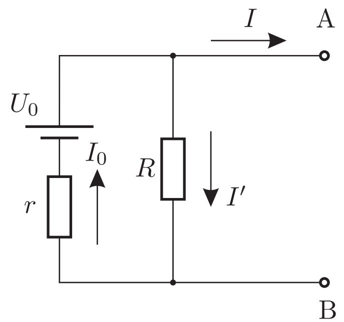

Рис. 11

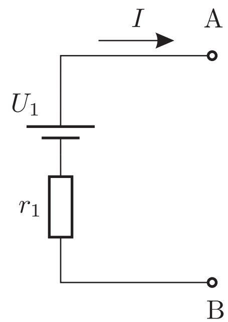

Рис. 12

Для эквивалентной схемы (рис. 12):

$$U_{AB} = U_1 - Ir_1. \tag{4}$$

Чтобы при любом значении I формулы (3) и (4) давали одинаковый результат, необходимо

$$U_1 = U_0 \frac{R}{R + r}, \qquad r_1 = \frac{Rr}{R + r}. \tag{5}$$

Примечание. При решении этой задачи можно сравнивать не только напряжение на разъёмах источника, но и силу тока через нагрузку, взяв в качестве параметра, например, сопротивление нагрузки.

Второе решение. Напряжение U_1 эквивалентной схемы есть показания вольтметра, подключенного к выводам A и B. Так как по условию схемы эквивалентны, при подключении к исходной схеме вольтметр показывает то же самое:

$$U_1 = U_0 \frac{R}{R + r}.$$

При коротком замыкании между выводами A и B исходной схемы течёт ток силой $I_{\text{к.з.}} = U_0/r$. При коротком замыкании выводов эквивалентной схемы сила тока должна быть такой же, причём ток течёт только через резистор r_1, поэтому:

$$r_1 = \frac{U_1}{I_{\text{к.з.}}} = r \cdot \frac{U_1}{U_0} = \frac{Rr}{R+r}.$$

Условие

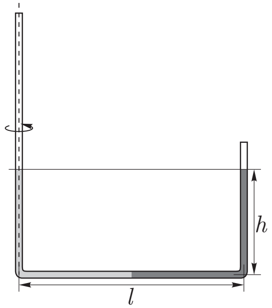

Рис. 13

В тонкой U-образной трубке постоянного сечения находится вода и ртуть одинаковых объемов. Длина горизонтальной части трубки $l = 40$ см. Трубку раскрутили вокруг колена с водой (рис. 13), и оказалось, что уровни жидкостей в трубке одинаковы и равны $h = 25$ см. Пренебрегая эффектом смачивания, определите период T вращения трубки.

Справочные данные: ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2; плотности воды и ртути равны $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3 и $\rho_р = 13{,}5$ г/см^3 соответственно.

Примерные критерии оценивания

Найден перепад давлений на концах малого элемента жидкости Δr 2

Указано, как найти разность давлений на горизонтальном участке (график или интегрирование) 1

Найдена разность давлений на горизонтальном участке (6) 1

Посчитан перепад давлений для ртути в горизонтальном участке (7) 1

Посчитан перепад давлений для воды в горизонтальном участке (7) 1

Записано выражение (8) 2

Получен ответ для периода в общем виде 1

Получен численный ответ для периода 1

Возможное решение

Найдем изменение давления в горизонтальной части трубки. Для этого запишем уравнение движения малого элемента жидкости длиной Δr, находящегося на расстоянии r от оси вращения:

$$a_{цс}\rho S\Delta r = \omega^2 r\rho S\Delta r = S\Delta p,$$

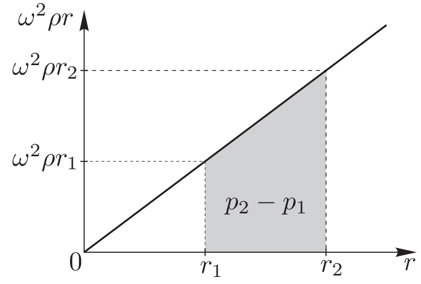

Рис. 14

где ω — угловая скорость вращения трубки, Δp — перепад давлений на концах малого элемента жидкости длиной Δr. При вычислении разности давлений на концах горизонтального участка трубки (заштрихованная площадь под графиком (рис. 14)) получим:

$$p_2 - p_1 = \omega^2\rho(r_2 - r_1)\cdot\frac{r_1 + r_2}{2} = \omega^2\rho\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}. \quad (6)$$

Перепад давлений между правым и левым коленом равен сумме перепадов давлений в горизонтальной части трубки, заполненной водой и ртутью:

$$p_2 - p_1 = \omega^2\rho_в\frac{(l/2)^2 - 0}{2} + \omega^2\rho_р\frac{l^2 - (l/2)^2}{2} = (3\rho_р + \rho_в)\frac{\omega^2 l^2}{8}. \quad (7)$$

Этот перепад давлений и поддерживает разность давлений вертикальных столбов воды и ртути:

$$(3\rho_р + \rho_в)\frac{\omega^2 l^2}{8} = \rho_р gh - \rho_в gh, \quad (8)$$

откуда $\omega = \sqrt{\frac{8gh}{l^2}\cdot\frac{\rho_р - \rho_в}{3\rho_р + \rho_в}}$. Период вращения

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi l}{\sqrt{2gh}}\cdot\sqrt{\frac{3\rho_р + \rho_в}{\rho_р - \rho_в}} \approx 1{,}0 \text{ с}.$$