Условие

Рис. 1

Как-то теоретик Баг, гуляя по берегу моря, увидел как отдыхающий строит замок из песка (рис. 1). Он решил узнать, какой максимальной высоты колонну можно построить из влажного песка. В одной из работ Леонарда Эйлера он обнаружил, что максимальная высота цилиндрической колонны изготовленной из однородного и изотропного материала, может быть рассчитана по формуле

$$H = 1{,}25 \cdot E^{\alpha} R^{\beta} \rho^{\gamma} g^{\lambda}, \tag{1}$$

где α, β, γ и λ — некоторые числовые коэффициенты, R — радиус колонны, ρ — плотность материала, из которого она изготовлена, g — ускорение свободного падения, E — модуль Юнга. Баг рассчитал, что если колонну сделать из влажного песка, то при её радиусе $R_1 = 5$ см, высота колонны окажется 1,0 м. Друг Бага, экспериментатор Глюк, решил собрать более «солидную» колонну. Он сделал радиус её основания $R_2 = 15$ см. Колонна какой высоты получилась у Глюка?

Справочные данные: плотность влажного песка $\rho = 1{,}5 \times 10^3$ кг/м^3, его модуль Юнга $E = 3{,}0 \times 10^6$ Па, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Примечание. Модуль Юнга — это коэффициент пропорциональности между давлением (или растяжением), действующим на плоскую поверхность исследуемого образца и его относительным сжатием (удлинением).

Примерные критерии оценивания

Записана система (2) 2
Решена система (2) 1
Записано уравнение (3) или эквивалентное ему 2
Найдено значение коэффициента α 3
Отношение высот выражено через отношение радиусов 1
Найдена высота H_2 1

Возможное решение

Поскольку высота имеет размерность длины, то все прочие размерности в выражении (1) должны в итоге дать ноль:

$$\dim\left(E^{\alpha} R^{\beta} \rho^{\gamma} g^{\lambda}\right) = M^{\alpha} L^{-\alpha} T^{-2\alpha} L^{\beta} M^{\gamma} L^{-3\gamma} L^{\lambda} T^{-2\lambda} = \\ = M^{\alpha+\gamma} T^{-2(\alpha+\lambda)} L^{\lambda-\alpha-3\gamma+\beta} = L,$$

а это значит, что

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0, & M \\ \alpha + \lambda = 0, & T \\ \lambda - \alpha - 3\gamma + \beta = 1. & L \end{cases} \tag{2}$$

Решая эту систему уравнений получим: $\alpha = -\gamma = -\lambda$ и $\alpha + \beta = 1$. С учётом этих соотношений уравнение (1) перепишем в виде:

$$H = 1{,}25 \cdot \left(\frac{E}{\rho g}\right)^{\alpha} R^{1-\alpha}. \tag{3}$$

Введём параметр

$$r = \frac{E}{\rho g} = \left(\frac{3{,}0 \times 10^6}{1{,}5 \times 10^3 \cdot 9{,}8}\right) \text{м} \approx 204\ \text{м}.$$

Теперь уравнение (1) примет вид: $H = 1{,}25\, r^{\alpha} R^{1-\alpha}$. По расчетам Бага

$$1\ \text{м} = 1{,}25\,(204\ \text{м})^{\alpha}\,(0{,}05\ \text{м})^{1-\alpha} = 1{,}25\left(\frac{204\ \text{м}}{0{,}05\ \text{м}}\right)^{\alpha}(0{,}05\ \text{м}).$$

Это выражение преобразуем к виду: $16 = (4080)^{\alpha}$. Откуда находим

$$\alpha = \frac{\ln 16}{\ln(4080)} = \frac{2{,}773}{8{,}314} = \frac{1}{3}.$$

Применим уравнение (3) для случая расчета Бага и эксперимента Глюка, а затем поделим одно на другое:

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда следует, что $H_2 = \left(\dfrac{0{,}15}{0{,}05}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 1\ \text{м} = 2{,}08\ \text{м} \approx 2\ \text{м}.$

Условие

Вблизи края гладкой горизонтальной полуплоскости лежат два одинаковых груза, соединенные лёгкой нерастянутой пружиной, длина которой l_0, а жёсткость — k. К грузу, ближайшему к краю плоскости, с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через лёгкий блок, прикреплён ещё один такой же груз массой m (рис. 28). Его удерживают так, что участок нити, идущий от блока к этому грузу, вертикален. Нижний груз отпускают.

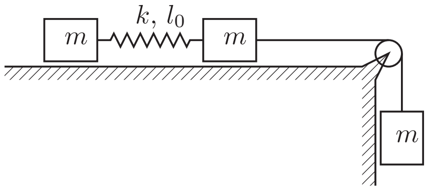

Рис. 28

Через какое минимальное время τ удлинение Δl пружины станет максимальным?

Найдите это удлинение.

Примерные критерии оценивания

Запись второго закона Ньютона для каждого из грузов (по 0,5 балла)	1,5
Равенство сил, действующих на грузы 1 и 2 со стороны пружины	0,5
Связи сил и ускорений, обусловленные нерастяжимостью нити	1
Получено уравнение (20)	2
Записано и решено уравнение колебаний	3
Найдено Δl	1
Найдено τ	1

Возможное решение

Рассмотрим груз (1), к которому прикреплена только пружина (рис. 29). На него действует только сила F_1 со стороны пружины:

$$ma_1 = F_1. \qquad (15)$$

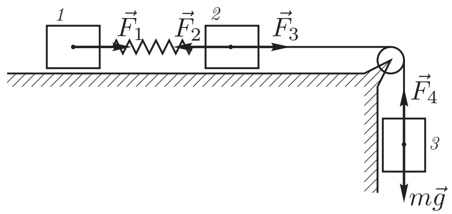

Рис. 29

Так как пружина лёгкая,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0, \quad \text{или} \quad F_1 = F_2 = F. \qquad (16)$$

Груз (2) движется под действием силы F_2 со стороны пружины и силы F_3 со стороны нити:

$$ma_2 = F_3 - F_2. \qquad (17)$$

На груз (3) действуют силы тяжести mg и реакции нити F_4:

$$ma_3 = mg - F_4. \qquad (18)$$

Поскольку нить нерастяжима, то

$$F_3 = F_4; \quad a_2 = a_3. \qquad (19)$$

Выразим из уравнений (15) — (19) разность ускорений

$$a_2 - a_1 = \frac{g}{2} - \frac{3F}{2m}.$$

С учётом закона Гука получаем:

$$\ddot{x} = a_2 - a_1 = \frac{g}{2} - \frac{3k}{2m}x, \qquad (20)$$

где x — удлинение пружины.

Введём обозначения:

$$\omega^2 = \frac{3k}{2m}; \quad A_0 = \frac{mg}{3k}; \quad y = x - A_0;$$

и перепишем уравнение (20):

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Мы получили уравнение колебаний, решение которого имеет вид

$$y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

или, возвращаясь к переменной x:

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + A_0.$$

Из условия, что система в начальный момент времени неподвижна ($\dot{x}(0) = 0$) следует, что $B = 0$, а из условия, что пружина не растянута — $A + A_0 = 0$. Отсюда получаем

$$x = A_0\left(1 - \cos(\omega t)\right).$$

Максимальное удлинение $\Delta l = 2A_0 = \dfrac{2mg}{3k}$ достигается впервые через время $\tau = \dfrac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}$.

Условие

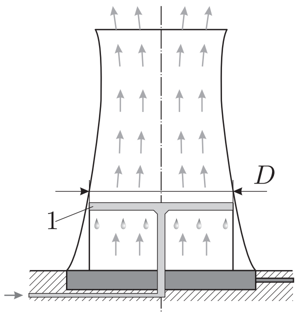

Рис. 30

На промышленных предприятиях для охлаждения больших объемов воды используют градирни (рис. 30). Рассмотрим идеализированную градирню, представляющую собой широкий цилиндр диаметром $D = 15$ м, в котором на некоторой высоте H от основания через специальные форсунки (1) распыляется горячая вода, температура которой $t_1 = 50°$C. По мере падения она остывает до температуры $t_2 = 28°$C. Посредством вентилятора навстречу падающим каплям снизу со скоростью $u = 2{,}0$ м/с поднимается воздух при температуре $t_0 = 29°$C. Считайте, что его температура на протяжении всего пути остается неизменной, а влажность меняется от $\varphi = 40\%$ на входе, до $\varphi_1 = 100\%$ на выходе из градирни. Какова производительность q градирни, то есть, сколько тонн воды охлаждается в ней за один час?

Справочные данные для воды:
удельная теплоемкость $c = 4{,}2 \times 10^3$ Дж/(кг·°С); удельная теплота парообразования $L = 2{,}3 \times 10^6$ Дж/кг, температурная зависимость давления насыщенных паров приведена на графике (рис. 31).

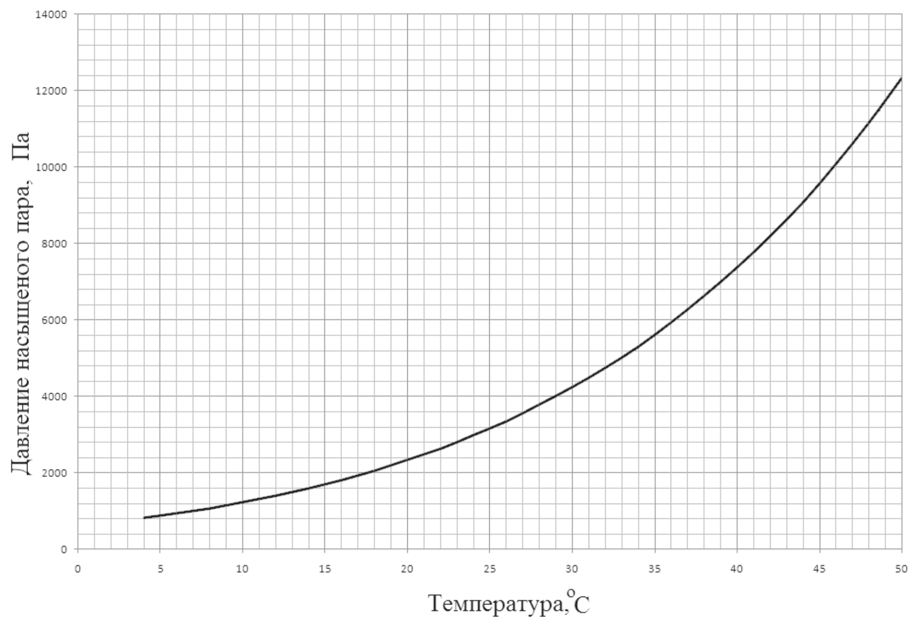

Рис. 31

Примерные критерии оценивания

Уравнение теплового баланса 2
Выражение для объёма воздуха, поступающего ежесекундно 1
Выражение для массы пара, поступающего в градирню в единицу времени . 2
Выражение для массы пара, выходящего из градирни за единицу времени . 2
Найдена масса воды, испаряющейся за единицу времени 1
Получен ответ 2

Возможное решение

По условию задачи температура воздуха, проходящего через градирню, не меняется, а вода остывает за счёт испарения. Изменение температуры Δt воды найдём на основе уравнения теплового баланса:

$$L\Delta m_1 = cq\Delta t,$$

где Δm_1 — масса испарившейся воды в единицу времени, q — масса воды, проходящей через градирню в единицу времени.

В градирню ежесекундно поступает объем воздуха

$$V_1 = Su = \frac{\pi D^2}{4}u.$$

Масса водяного газа (пара), поступающего в единицу времени в градирню вместе с воздухом, равна

$$m_{\text{вх}} = \frac{V_1 \mu p}{RT}, \quad \text{или} \quad m_{\text{вх}} = \frac{\pi D^2 u\mu p}{4RT},$$

где p — давление водяного пара на входе.

Масса пара, выходящего из градирни за то же время, равна

$$m_{\text{вых}} = \frac{V_1 \mu p_{\text{нас}}}{RT}, \quad \text{или} \quad m_{\text{вых}} = \frac{\pi D^2 u\mu p_{\text{нас}}}{4RT}.$$

Таким образом, из поступающей в градирню воды ежесекундно испаряется

$$\Delta m_1 = \frac{\pi D^2 u\mu p_{\text{нас}}}{4RT}(1-\varphi).$$

Тогда

$$q = \frac{\Delta m_1 L}{c\Delta t} = \frac{\pi D^2 u\mu p_{\text{нас}}(1-\varphi)L}{4RTc\Delta t} \approx 150 \text{ кг/с} = 540 \text{ т/час}.$$

Условие

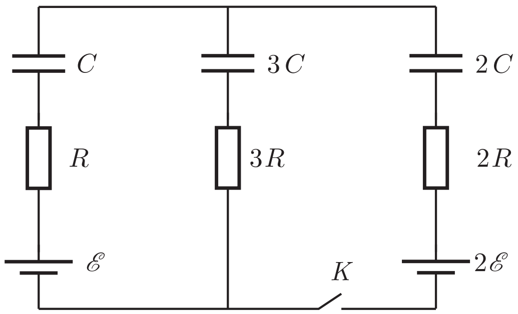

Рис. 32

Параметры электрической цепи указаны на схеме (рис. 32). Вначале ключ K разомкнут.
1. Определите напряжение на конденсаторе емкостью C.
2. Определите силу тока, который потечёт через резистор сопротивлением $3R$, сразу после замыкания ключа K.
3. Какое напряжение установится на конденсаторе емкостью C после того, как переходные процессы в цепи завершатся?

Примерные критерии оценивания

До замыкания ключа:

Найдено напряжение на конденсаторе C до замыкания ключа 2

Сразу после замыкания ключа:

Записаны вторые законы Кирхгофа для двух различных контуров....... 2

Записан первый закон Кирхгофа 1

Определена сила тока, текущего через резистор $3R$ сразу после замыкания ключа... 1

После прекращения всех переходных процессов:

Записан закон сохранения заряда 1

Записаны вторые законы Кирхгофа для двух различных контуров....... 2

Найдено напряжение на конденсаторе ёмкостью C 1

Возможное решение

1. Вначале в замкнутом контуре, состоящем из емкостей C и $3C$, ток не протекал. На рис. 33 изображена эквивалентная схема этой цепи. Суммарный заряд, сосредоточенный на верхних обкладках конденсаторов C и $3C$, равен нулю. Значит,

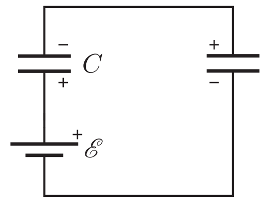

Рис. 33

$$\mathscr{E} = \frac{q}{C} + \frac{q}{3C} = \frac{4q}{3C}.$$

После алгебраических преобразований найдём искомое напряжение:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{3}{4}\mathscr{E}.$$

2. Сразу после замыкания ключа K, заряд и напряжение на конденсаторе $2C$ равны нулю. Согласно второму закону Кирхгофа для контура №1 (рис. 34) запишем:

$$\mathscr{E} = -I_1 R + U_C + U_{3C} + I_3 R. \tag{21}$$

Поскольку $\mathscr{E} = U_C + U_{3C}$, уравнение (21) примет вид:

$$I_1 R = I_3 \cdot 3R, \quad \text{или} \quad I_1 = 3I_3.$$

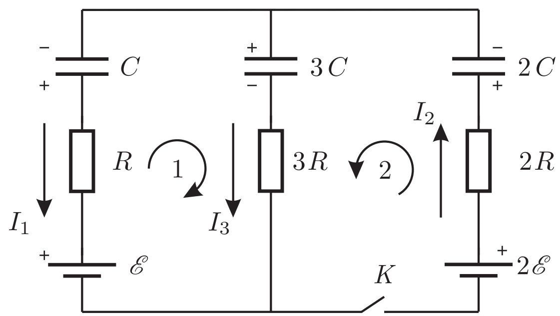

Рис. 34

Согласно второму закону Кирхгофа для контура №2 запишем:

$$2\mathscr{E} = I_2 \cdot 2R + U_{3C} + I_3 \cdot 3R, \quad \text{или} \quad \frac{7\mathscr{E}}{4R} = 2I_2 + 3I_3.$$

По первому закону Кирхгофа $I_2 = I_1 + I_3 = 4I_3$. Тогда

$$I_3 = \frac{7\mathscr{E}}{44R}.$$

3. После того, как переходные процессы завершатся, ток по контурам течь не будет. На рис. 35 изображена эквивалентная схема этой цепи. Суммарный

заряд, сосредоточенный на верхних обкладках конденсаторов C, $2C$ и $3C$, равен нулю:

$$q_1 + q_2 = q_3.$$

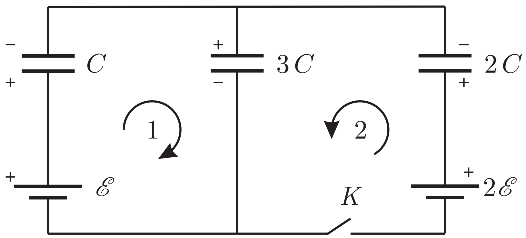

Рис. 35

Для контура №1: $$\mathscr{E} = \frac{q_1}{C} + \frac{q_3}{3C}.$$

Для контура №2: $$2\mathscr{E} = \frac{q_2}{2C} + \frac{q_3}{3C}.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем

$$q_1 = \frac{1}{6}C\mathscr{E}, \quad U_1 = \frac{q_1}{C} = \frac{1}{6}\mathscr{E}.$$

Условие

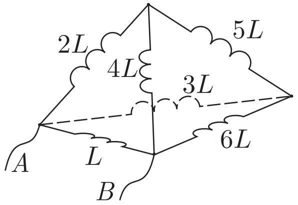

Рис. 36

Шесть идеальных катушек индуктивности соединили в электрическую цепь так, что катушки образовали ребра тетраэдра (рис. 36). К вершинам A и B подсоединили последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 100$ Ом, батарейку с ЭДС $\mathscr{E} = 4{,}6$ В, миллиамперметр и ключ. Индуктивность катушки $L = 1$ мГн. Взаимной индуктивностью катушек пренебречь.

1. Вычислите силу тока I_{60}, протекающего через миллиамперметр спустя 1 минуту после замыкания ключа.
2. Вычислите силу тока, протекающего через каждую из катушек в тот момент, когда сила тока, протекающего через миллиамперметр, равна $I_{\text{A}} = 23$ мА.

Примерные критерии оценивания

Указано, что индуктивность системы порядка L 1
Указано, что характерное время равно $L/R = 10^-5 \ll 60$ с 0,5
Получен ответ $I_{60} = 46$ мА 0,5
Записан второй закон Кирхгофа для одного из контуров, состоящего только из катушек 1
Показано, что для контура, содержащего только катушки, верно соотношение, аналогичное (22) 2

Первый способ

Получены уравнения для трех разных контуров, состоящих только из катушек (по 0,5 балла за каждое) 1,5
Записан первый закон Кирхгофа для двух узлов (по 0,5 балла за каждый) . 1
Записано выражение для суммарного тока через миллиамперметр 0,5
Получен ответ для сил токов через катушки 2

Второй способ

Указано, что мост сбалансирован, ток через катушку $5L$ не течёт 2
Найдено отношение индуктивностей в параллельных ветвях 1
Получен ответ для сил токов через катушки 2

Возможное решение

1. Система катушек в тетраэдре имеет индуктивность порядка L. Характерное время установления токов в системе равно $L/R = 10^{-5}$ с. Таким образом, за минуту в цепи переходные процессы прекратятся и искомая сила тока $I_{60} = \mathscr{E}/R = 46$ мА.
2. Перерисуем схему в виде, более удобном для анализа (рис. 37).

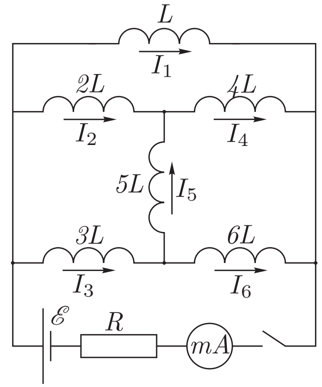

Рис. 37

Для любой катушки индуктивности ЭДС самоиндукции

$$\mathscr{E}_i = -L\frac{dI}{dt}.$$

Рассмотрим контура, которые не содержат батареек. Для примера рассмотрим контур из катушек $2L$, $5L$, $3L$. Запишем второй закон Кирхгофа:

$$-2L\frac{dI_2}{dt} + 5L\frac{dI_5}{dt} + 3L\frac{dI_3}{dt} = 0,$$

$$-2L\Delta I_2 + 5L\Delta I_5 + 3L\Delta I_3 = 0.$$

Первый способ. Учитывая, что все токи вначале равны нулю, получаем:

$$-2I_2 + 5I_5 + 3I_3 = 0. \tag{22}$$

Записывая аналогичные равенства для других контуров получаем ещё два уравнения:

$$-I_1 + 4I_4 + 2I_2 = 0, \tag{23}$$

$$-4I_4 - 5I_5 + 6I_6 = 0 \tag{24}$$

Для узлов, к которым присоединена катушка $5L$, применим первый закон Кирхгофа:

$$I_2 + I_5 = I_4, \tag{25}$$

$$I_3 = I_5 + I_6. \tag{26}$$

Решая систему уравнений (22), (23), (24), (25), (26) с учётом того, что суммарный ток через миллиамперметр равен $I_A = I_1 + I_2 + I_3 = 23$ мА, получим:

$$I_5 = 0\text{ мА},\quad I_2 = I_4 = 3\text{ мА},\quad I_3 = I_6 = 2\text{ мА},\quad I_1 = 18\text{ мА}. \tag{27}$$

Второй способ. По аналогии с уравнением (22) можно провести формальную замену катушек индуктивности резисторами, причём аналогами сопротивлений будут являться индуктивности катушек L. Заметим, что катушки индуктивности $2L$, $4L$, $3L$, $6L$, $5L$ образуют сбалансированный мост, так как верно соотношение:

$$\frac{2L}{4L} = \frac{3L}{6L}.$$

Мост сбалансирован, поэтому ток через катушку $5L$ не течёт.

Индуктивности параллельных ветвей сверху вниз относятся как 1:6:9, следовательно, силы тока будут относиться как 9:1,5:1 соответственно. Ток через миллиамперметр равен 23 мА. Поэтому, получаем ответ (27).