9 класс

9.1. На доске записано несколько последовательных натуральных чисел. Ровно 52% из них — четные. Сколько четных чисел записано на доске?

Ответ: 13.

Решение. Так как записанные натуральные числа являются последовательными, то четные и нечетные числа чередуются. По условию четных чисел больше, значит, записанная последовательность начинается и заканчивается четными числами.

Первый способ. Пусть записано n четных чисел, тогда нечетных — $(n-1)$. Значит, четные числа составляют $\frac{n}{2n-1}\cdot 100\%$ от всех записанных на доске. Получаем уравнение $100n = 52(2n-1)$, откуда $n = 13$.

Второй способ. Пусть всего записано x чисел. Тогда среди них $\frac{13}{25}x$ четных и $\frac{12}{25}x$ нечетных, причем четных больше ровно на одно. Следовательно, $\frac{13}{25}x - \frac{12}{25}x = 1$, откуда $x = 25$. Значит, $\frac{13}{25}x = 13$.

Третий способ. Четных чисел больше на одно, значит, одно число составляет $(52-48)\%$ от их общего количества. Следовательно, искомое количество четных чисел равно $\frac{52}{52-48} = 13$.

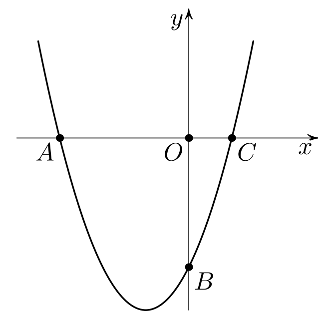
Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное решение* (*любым способом*)

$\pm$ *приведены верные, в целом, рассуждения, но ответ дан не на тот вопрос* (*например, найдено только общее количество записанных чисел*)

$\mp$ *приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка*

$-$ *приведен только ответ*



9.2. На рисунке изображен график функции $y = x^2 + ax + b$. Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC.

Ответ: 1.

Решение. Так как $y(0) = b$, то $B(0; b)$. Найдем теперь длину отрезка OA.

Первый способ. Так как прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$, то она параллельна прямой $y = -x$. Кроме того, эта прямая проходит через точку $B(0; b)$. Значит, она задается уравнением $y = -x + b$. Так как $y = 0$ при $x = b$, то $OA = -b$.

Второй способ. Из условия задачи следует, что биссектриса треугольника AOB, проведенная к стороне AB, лежит на прямой $y = x$, поэтому совпадает с высотой этого треугольника. Следовательно, $OA = OB = -b$.

Таким образом, число b и искомая длина c отрезка OC являются корнями квадратного уравнения $x^2+ax+b = 0$. По теореме Виета: $bc = b$. Так как $b \neq 0$, то $c = 1$.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное решение с незначительными пробелами в обоснованиях*

$\mp$ *доказано только, что $OA = OB$, а дальнейших продвижений нет*

$\mp$ *равенство $OA = OB$ использовано без доказательства, после чего обоснованно получен верный ответ*

$\mp$ *верный ответ получен, исходя из конкретных числовых значений a и b*

$-$ *приведен только ответ*

9.3. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O, которая касается стороны AB в точке E. На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $AD = \frac{1}{2}AC$. Докажите, что прямые DE и AO параллельны.

Решение. Пусть M — точка касания окружности со стороной AC (см. рис. 9.3). Так как треугольник ABC — равнобедренный, то M — середина AC. Таким образом, $DA = AM = MC$.

С другой стороны, $AE = AM$ (отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки). Из равенства $AE = AM = AD$ следует, что треугольник DEM — прямоугольный с прямым углом E, то есть $DE \perp EM$. Кроме того, в равнобедренном треугольнике EAM биссектриса AO является также высотой, то есть $AO \perp EM$. Следовательно, DE и AO параллельны.

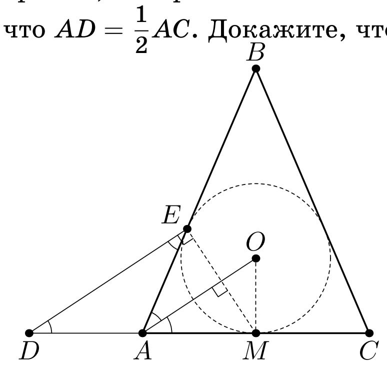


Рис. 9.3

Обосновав, что $AD = AE$, можно также сослаться на известный факт: биссектриса AO внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника DAE параллельна основанию DE. Этот факт несложно и доказать: если $\angle AED = \angle ADE = \alpha$, то $\angle CAE = 2\alpha$, значит, $\angle OAE = \alpha$. Таким образом, $DE \parallel AO$ (по признаку параллельности прямых).

Возможны и другие способы решения.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное решение с незначительными неточностями или пробелами*

$\mp$ *доказано только, что $AE = DA = AM = MC$, а дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют*

$-$ *приведено неверное рассуждение или решение отсутствует*

9.4. В квадратной таблице размером 100×100 некоторые клетки закрашены. Каждая закрашенная клетка является единственной закрашенной клеткой либо в своем столбце, либо в своей строке. Какое наибольшее количество клеток может быть закрашено?

Ответ: 198.

Решение. *Пример.* Закрасим все клетки одной строки и все клетки одного столбца, за исключением их общей клетки. В этом случае условие задачи выполнено и закрашено ровно 198 клеток.

Оценка. Докажем, что требуемым образом не могло быть закрашено больше, чем 198 клеток. Для каждой закрашенной клетки выделим ту линию (строку или столбец), в которой она единственная закрашенная. При таком выделении не может быть выделено больше, чем 99 строк. Действительно, если выделено 100 строк, то каждая закрашенная клетка — единственная именно в своей строке, но тогда закрашенных клеток — не более, чем 100. Аналогично, не может быть выделено и больше, чем 99 столбцов. Поэтому выделенных линий, а значит, и закрашенных клеток, не более, чем 198.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\mp$ *приведен верный ответ и описан пример раскраски, но оценка отсутствует или проведена неверно*

$-$ *приведен только ответ*

9.5. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG, если $DE = 5$ см.

Ответ: 10 см.

Решение. Пусть $\angle HBF = \alpha$ (см. рис. 9.5). Тогда $\angle FAH = \angle HBF = \alpha$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Из прямоугольного треугольника ADC: $\angle C = 90^\circ - \alpha$, а из прямоугольного треугольника ECB: $\angle EBC = 90^\circ - \angle C = \alpha$.

Таким образом, BE — высота и биссектриса треугольника FBC, следовательно, этот треугольник равнобедренный и BE является его медианой, то есть $FE = EC$. Аналогично доказывается, что $CD = DG$. Значит, ED — средняя линия треугольника FCG. Поэтому $FG = 2DE = 10$ (см).

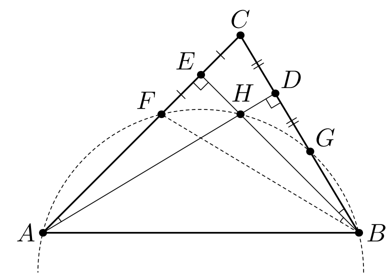


Рис. 9.5

Критерии проверки:

$+ -$ *приведено полное обоснованное решение*

$-$ *приведен только ответ*

9.6. Двадцать пять монет раскладывают по кучкам следующим образом. Сначала их произвольно разбивают на две группы. Затем любую из имеющихся групп снова разбивают на две группы, и так далее до тех пор, пока каждая группа не будет состоять из одной монеты. При каждом разбиении какой-либо группы на две записывается произведение количеств монет в двух получившихся группах. Чему может быть равна сумма всех записанных чисел?

Ответ: 300.

Решение. *Первый способ.* Изобразим монеты точками и соединим каждую пару точек отрезком. Получим $\frac{25(25-1)}{2} = 300$ отрезков. При каждом разбиении одной группы монет на две будем стирать все отрезки, соединяющие точки, соответствующие монетам, оказавшимся в разных группах. Пусть на некотором шаге мы разбили монеты одной из уже имевшихся групп на две группы по x и y монет. Тогда мы стираем xy отрезков. Это же число мы записываем. Таким образом, сумма записанных чисел — это количество всех стертых отрезков. Так как изначально было 300 отрезков, а в итоге все отрезки стерты, то общее количество стертых отрезков равно 300.

Второй способ. Рассмотрим переменную величину S, равную в каждый момент половине суммы квадратов количеств монет в кучках. Изначально $S = \frac{25^2}{2} = 312,5$, а в самом конце $S = \frac{1^2+1^2+\ldots.+1^2}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$. Если кучка, в которой было $x+y$ монет разбивается на две кучки по x и y монет, то S уменьшается на $\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{x^2+y^2}{2} = xy$. Таким образом, при каждом разбиении величина S уменьшается на очередное записываемое число. Следовательно, сумма всех записанных чисел равна общему уменьшению величины S, которое равно $312{,}5 - 12{,}5 = 300$.

Третий способ. Докажем по индукции, что если изначально имеется n монет, то искомая сумма равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

База индукции. При $n = 2$ после первого же шага получаем две кучки по одной монете в каждой и записываем число $1 \cdot 1 = 1$. Так как равенство $\frac{2(2-1)}{2} = 1$ верное, то при $n = 2$ доказываемое утверждение верно.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение верно для всех $n < k$ и докажем, что тогда оно верно и для $n = k$. Пусть на первом шаге k монет разделили на две группы по x и y монет ($k = x + y$). Для x и y монет доказываемое утверждение верно по предположению индукции.

Если при таком разбиении $x \geqslant 2$ и $y \geqslant 2$, то записанная сумма равна

$$xy + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{x^2 - x + y^2 - y + 2xy}{2} = \frac{(x+y)^2 - (x+y)}{2} = \frac{k^2-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Если же $x = 1$ и $y \geqslant 2$, то $k = y + 1$ и записанная сумма в этом случае равна $1 \cdot y + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{(y+1)^2 - (y+1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$. Согласно принципу математической индукции, утверждение доказано для любого натурального $n \geqslant 2$. В частности, для 25 монет получим: $\frac{25(25-1)}{2} = 300$.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение с незначительными неточностями или пробелами*

$-$ *приведен только ответ*