6 класс

6.1. В большой таблетке от жадности 11 г антивещества, в средней — 1,1 г, а в маленькой — 0,11 г. Доктор прописал Робину-Бобину съесть ровно 20,13 г антивещества. Сможет ли Робин-Бобин выполнить предписание доктора, съев хотя бы по одной таблетке каждого вида? (*Если сможет, то объясните как, если не сможет, то почему.*)

Ответ: сможет.

Решение. Приведем все возможные примеры наборов таблеток.

1) 1 большая, 1 средняя, 73 маленькие; 2) 1 большая, 2 средние, 63 маленькие;

3) 1 большая, 3 средние, 53 маленькие; 4) 1 большая, 4 средние, 43 маленькие;

5) 1 большая, 5 средних, 33 маленькие; 6) 1 большая, 6 средних, 23 маленькие;

7) 1 большая, 7 средних, 13 маленьких; 8) 1 большая, 8 средних, 3 маленькие.

Поясним, почему нет других примеров. Попробовав по одной таблетке каждого вида, Робин-Бобин съест $11+1,\ 1+0{,}11=12{,}21$ *г антивещества. Дополнительно ему потребуется съесть* $20{,}13-12{,}21 = 7{,}92$ *г антивещества. Больших таблеток Робин-Бобин больше съесть не сможет, так как* $11 > 7{,}92$. *А средних таблеток он сможет съесть любое количество от нуля до семи.*

Критерии проверки:

$+$ *приведены один или несколько верных примеров с пояснениями (вычислениями)*

$\pm$ *приведены один или несколько верных примеров без пояснений (вычислений)*

$\mp$ *приведены верный ответ «сможет» и разумные соображения, но допущена ошибка, из-за которой приведенный пример неверен*

$-$ *приведен только ответ (пример отсутствует)*

6.2. Второклассники Коля, Вася, Миша, Степа и Гриша по очереди верно решили пять примеров из таблицы умножения. Каждый следующий мальчик получил ответ в полтора раза больше предыдущего. Какие числа умножал Степа?

Ответ: 6 и 9.

Решение. *Первый способ.* Каждый мальчик получил ответ в $\frac{3}{2}$ раза больше, чем предыдущий. Поэтому Гриша получил ответ в $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{16}$ раза больше, чем Коля. Так как все числа, полученные мальчиками, целые, то Гришино число должно быть кратно 81. Но 81 — самое большое число в таблице умножения, поэтому Гриша получил ровно 81. Тогда Степа получил $81 : \frac{3}{2} = 54$. Число 54 единственным образом представляется в виде произведения двух однозначных чисел (из таблицы умножения): $54 = 6 \times 9$.

Второй способ. Пусть Коля получил в ответе число x. Тогда Вася получил $x\cdot 1{,}5 = \frac{3x}{2}$, Миша — $\frac{3\cdot 3x}{2\cdot 2}$, Степа — $\frac{3\cdot 3\cdot 3x}{2\cdot 2\cdot 2}$, а Гриша — $\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3x}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}$. Гришино число целое, а числа 2 и 3 — взаимно простые, поэтому в разложение числа x на простые множители должны входить, как минимум, четыре двойки.

Если других множителей в этом разложении нет, то Коля получил 16, Вася — 24, Миша — 36, Степа — 54, а Гриша — 81. В этом случае Степа умножал числа 6 и 9.

Предположим, что в этом разложении есть еще что-то, кроме четырех двоек, тогда на это «что-то» умножился бы и Гришин результат 81, но тогда бы он не вошел в таблицу умножения. Значит, другие случаи невозможны.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и верное решение с полным обоснованием*

$\pm$ *обоснованно получен только верный результат умножения Стёпы, а множители не найдены*

$\mp$ *обоснованно найдены только результаты умножения кого-то из других мальчиков*

$\mp$ *приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию, но не обосновано, что он — единственный*

$-$ *приведен только ответ*

6.3. Из четырех фотографий можно составить три различных прямоугольника (см. рис. 6.3а–в). Периметр какого-то одного из них равен 56 см. Найдите периметры остальных двух прямоугольников, если периметр фотографии равен 20 см.

Ответ: 40 см и 44 см.

Решение. У прямоугольника на рис. 6.3а ширина и высота в два раза больше, чем ширина и высота фотографии соответственно. Поэтому его периметр в два раза больше, чем периметр фотографии, то есть он равен 40 см (и не равен 56 см).

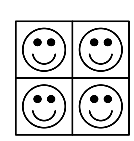

Рис. 6.3а

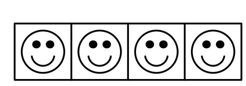

Рис. 6.3б

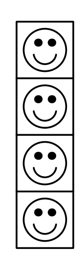

Рис. 6.3в

У прямоугольника на рис. 6.3б ширина в четыре раза больше ширины фотографии, а высота — такая же. Поэтому его периметр равен сумме периметра фотографии и её шестикратной ширины.

У прямоугольника на рис. 6.3в высота в четыре раза больше высоты фотографии, а ширина — такая же. Поэтому его периметр равен сумме периметра фотографии и её шестикратной высоты.

Пусть 56 см — это периметр второго прямоугольника. Так как периметр фотографии равен 20 см, то 36 см — ее шестикратная ширина. Значит, в этом случае ширина фотографии равна 6 см, тогда ее высота равна 4 см. Следовательно, периметр третьего прямоугольника равен $20 + 6 \cdot 4 = 44$ (см).

Если же 56 см — это периметр третьего прямоугольника, то рассуждения аналогичны, но высота и ширина поменяются «ролями», поэтому периметр второго прямоугольника будет равен 44 см.

Аналогичные рассуждения можно также провести, вводя переменные и составляя уравнения.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и верное решение с полным обоснованием*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное в целом решение, но из двух случаев* 6.3*б и* 6.3*в разобран только один и не показано, что другой случай ему аналогичен*

$\pm$ *верно рассмотрены все случаи, верно найдены ширина и высота фотографии, но ответ* 44 *не получен*

$\mp$ *обоснованно найдены периметры для случая* 6.3*б или* 6.3*в (или обоих), но не показано, что в случае* 3*а периметр не может быть равен* 56

$\mp$ *приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию, но не обосновано, что другие ответы невозможны*

$-$ *приведен только ответ*

6.4. Все жители острова либо рыцари и говорят только правду, либо лжецы и всегда лгут. Путешественник встретил пятерых островитян. На его вопрос «Сколько среди вас рыцарей?» первый ответил: «Ни одного!», а двое других ответили: «Один». Что ответили остальные?

Ответ: остальные ответили: «Два».

Решение. Рыцарь не мог ответить «Ни одного», так как это было бы ложью. Поэтому первый — лжец. Двое других ответили одинаково, поэтому они либо оба рыцари, либо оба лжецы. Но если они были бы рыцарями, то рыцарей на острове не менее двух, и ответ «Один» будет ложным. Поэтому и второй, и третий — лжецы.

Получается, что из пятерых жителей острова, как минимум, трое — лжецы. Тогда рыцарей либо один, либо двое, либо ни одного. Если бы рыцарей не было совсем, то первый лжец сказал бы правду. Ровно одного рыцаря быть не может, так как в этом случае сказали бы правду второй и третий лжецы. Значит, на острове два рыцаря — это оба оставшиеся островитянина. И каждый из них ответит правду: «Два».

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и верное решение с полным обоснованием*

$\pm$ *обосновано, что первые трое островитян — лжецы и обосновано, что оставшиеся двое — рыцари, но не сказано, что они ответят*

$\mp$ *обосновано, что первые трое островитян — лжецы, но решение не закончено или закончено неверно*

$\mp$ *приведён верный ответ с указанием роли каждого островитянина и проверено, что он удовлетворяет условию, но не доказано отсутствие других возможностей*

$-$ *приведен только ответ*

6.5. Шейх разложил свои сокровища по девяти мешкам: в первый мешок 1 кг, во второй — 2 кг, в третий — 3 кг, и так далее, в девятый — 9 кг. Коварный визирь украл часть сокровищ из одного мешка. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь шейху определить, из какого именно?

Решение. Приведем два возможных способа решения.

Первый способ. **I взвешивание.** Разделим мешки на группы по три мешка в каждой так, чтобы суммарные массы мешков в каких-то двух группах были равны. Например, $1 + 3 + 7$, $2 + 4 + 5$ и $6 + 8 + 9$. Взвесим две группы мешков, в которых масса должна быть одинаковой. Если весы покажут равенство, то кража была произведена из мешка третьей группы; если какая-то из взвешиваемых групп перевесит, то кража — из другой взвешиваемой группы.

II взвешивание. Рассмотрим найденную группу из трёх мешков, из которой была совершена кража. Кладем на весы по одному мешку из этой группы и на одну из чаш добавляем мешок из другой группы (из которой кража не совершалась) с известной массой с тем, чтобы уравновесить весы (то есть этот мешок играет роль гири).

Например, для первой группы на весы можно положить мешки $1 + (2)$ и 3; для второй — $2 + (3)$ и 5; для третьей — $6 + (2)$ и 8 (в скобках указаны «мешки-гири») . Если весы уравновесились, то кража совершена из оставшегося мешка, а если нет, то из лежащего на более легкой чаше.

Второй способ. Расположим массы мешков в виде таблицы (см. рис. 6.5).

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 6.5

Разделим мешки на три группы по три мешка так, чтобы в каждую группу вошло по одному мешку из каждой строки и по одному мешку из каждого столбца. При этом суммарная масса мешков в каждой тройке будет равна 15.

Для решения задачи достаточно рассмотреть любой из двух примеров такого разбиения. Выберем один из них: $1 + 5 + 9$, $2 + 6 + 7$ и $3 + 4 + 8$ (вариант: $1 + 6 + 8$, $2 + 4 + 9$ и $3 + 5 + 7$ рассматривается аналогично)

I взвешивание. Взвесим две тройки мешков. Если какая-то из них перевесит, то кража была произведена из другой взвешиваемой тройки. Если же весы покажут равенство, то сокровища похищены из мешка третьей тройки.

II взвешивание. Рассмотрим найденную группу из трёх мешков, из которой была совершена кража. На две чаши весов кладем по мешку из этой тройки: на одну — из первой строки таблицы, на другую — из второй. К первому мешку добавляем тот, что находится в таблице в клетке под вторым, а ко второму добавляем тот, что находится в таблице в клетке под первым. Например, если ограблена тройка $2 + 6 + 7$, то на одну чашу весов кладем $2 + 9$, а на другую — $6 + 5$. Заметим, что добавленные мешки не ограблены (два мешка из одного столбца не могут одновременно находиться в «подозрительной» тройке). Без воровства весы находились бы в равновесии (так как один из мешков, лежащих на одной чаше весов, на три килограмма легче своего «партнера» на другой чаше, зато другой — на 3 кг тяжелее). Поэтому если весы в равновесии, то ограблен третий мешок из тройки (в нашем примере — это 7 кг), а если одна из чаш перевешивает, то ограблен мешок из «подозрительной» тройки, лежащий на другой, более легкой чаше весов.

Возможно, существуют и другие верные алгоритмы. Но в любом случае первым взвешиванием необходимо отобрать из девяти мешков три «подозрительных».

Критерии проверки:

$+$ *приведен любой верный алгоритм с указанием того, как организовать второе взвешивание в зависимости от исхода первого и как сделать вывод в зависимости от исхода второго взвешивания*

$\mp$ *верный алгоритм разобран для одного или нескольких частных случаев, но не показано, почему он позволяет сделать вывод при любых исходах взвешиваний (голословное заявление, что другие случаи «аналогичны», не учитывается)*

$\mp$ *предложено первое взвешивание, сравнивающее две тройки мешков с равными массами, и сделан вывод об определении «подозрительной» тройки; способ проведения второго взвешивания либо не указан, либо указан неверно, либо он годится только для частного случая*

$-$ *приведен неверный алгоритм*