11 класс

11.1. Сережа и Миша, гуляя по парку, набрели на поляну, окруженную липами. Сережа пошел вокруг поляны, считая деревья. Миша сделал то же самое, но начал с другого дерева (хотя пошел в ту же сторону). Дерево, которое у Сережи было 20-м, у Миши было 7-м, а дерево, которое у Сережи было 7-м, у Миши было 94-м. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

Ответ: 100.

Решение. *Первый способ.* Пусть вокруг поляны росло n деревьев. Вычислим двумя способами количество промежутков между теми двумя деревьями, о которых сказано в условии задачи. При обходе Сережи: $20 - 7 = 13$. При обходе Миши: $7 + (n - 94) = n - 87$. Следовательно, $n - 87 = 13$, то есть $n = 100$.

Второй способ. Между первым и вторым упомянутыми деревьями Миша насчитал еще $94-7-1 = 86$ деревьев. А Сережа между вторым деревом и первым деревом насчитал $20 - 7 - 1 = 12$ деревьев. Значит, вокруг поляны растет $86 + 12 = 98$ и еще два упомянутых дерева, то есть ровно 100 деревьев.

Критерии проверки:

+ приведены верный ответ и полное обоснованное решение

∓ приведен верный ход рассуждений, но допущена ошибка на одно дерево при «перескоке»

− приведен только ответ

11.2. В треугольнике ABC угол C равен $75°$, а угол B равен $60°$. Вершина M равнобедренного прямоугольного треугольника BCM с гипотенузой BC расположена внутри треугольника ABC. Найдите угол MAC.

Ответ: $30°$.

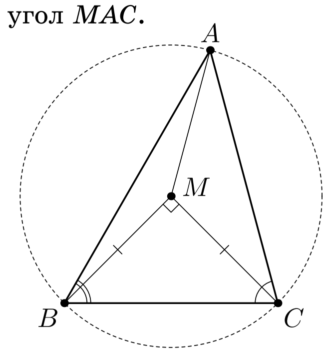

Рис. 11.2

Первый способ. Из условия задачи следует, что угол $\angle BAC = 45°$. Проведем окружность с центром M и радиусом $MB = MC$ (см. рис. 11.2). Так как $\angle BMC = 90°$, то большая дуга BC этой окружности является геометрическим местом точек, из которых хорда BC видна под углом $45°$. Следовательно, вершина A принадлежит этой окружности. Значит, треугольник AMC — равнобедренный, тогда $\angle MAC = \angle MCA = \angle BCA - \angle MCB = 75° - 45° = 30°$.

Второй способ. Пусть $BC = a$, тогда из треугольника BMC: $MC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Из треугольника ABC по теореме синусов получим, что $\dfrac{BC}{sin 45°} = \dfrac{AC}{sin 60°}$, то есть $AC = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Далее, из треугольника CMA по теореме косинусов: $AM^2 = CM^2 + CA^2 - 2CM \cdot CA \cdot cos\angle MCA = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{3a^2}{2} - 2\dfrac{a}{\sqrt{2}} \cdot a \times$ $\times \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$, то есть $AM = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Следовательно, треугольник AMC — равнобедренный.

Дальнейшие вычисления изложены выше.

Критерии проверки:

+ приведены верный ответ и полное обоснованное решение

± доказано, что треугольник AMC — равнобедренный, но в дальнейшем допущена арифметическая ошибка

− приведен только ответ

11.3. Для квадратного трехчлена $f(x)$ и некоторых действительных чисел l, t и v выполнены равенства: $f(l) = t + v$, $f(t) = l + v$, $f(v) = l + t$. Докажите, что среди чисел l, t и v есть равные.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Из условия задачи вытекают следующие равенства:

$$\begin{cases} al^2 + bl + c = t + v, & (1) \\ at^2 + bt + c = v + l, & (2) \\ av^2 + bv + c = l + t. & (3) \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (1) сначала уравнение (2), а затем уравнение (3), получим:

$$\begin{cases} a(l^2 - t^2) + b(l - t) = t - l, \\ a(l^2 - v^2) + b(l - v) = v - l. \end{cases}$$

Предположим, что среди чисел l, t и v нет равных, то есть $l \neq t$ и $l \neq v$. Тогда, разделив почленно первое уравнение на $l - t$, а второе уравнение — на $l - v$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a(l + t) + b = -1, \\ a(l + v) + b = -1. \end{cases}$$

Вычитая из одного уравнения другое, получим: $a(t - v) = 0$, а это возможно только, если $t = v$. Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что среди чисел l, t и v нет равных, неверно.

Критерии проверки:

+ приведено полное обоснованное решение

∓ составлена первая система уравнений и получено какое-то следствие из нее, но решение до конца не доведено

11.4. На экране компьютера — число 12. Каждую секунду число на экране умножают или делят либо на 2, либо на 3. Результат действия возникает на экране вместо записанного числа. Ровно через минуту на экране появилось число. Могло ли это быть число 54?

Ответ: нет, не могло.

Решение. Заметим, что $12 = 2^2 \cdot 3^1$, то есть суммарный показатель степени множителей (двоек и троек) равен 3. Независимо от произведенного действия, при каждой смене числа суммарный показатель степени множителей изменяется на 1. Всего должно произойти 60 таких изменений. Следовательно, через 60 секунд суммарный показатель степени должен быть той же четности, что и в исходном числе 12.

Но $54 = 2^1 \cdot 3^3$, то есть этот показатель равен 4 — четному числу. Значит, получить число 54 ровно через минуту невозможно.

Критерии проверки

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

± *приведены верный ответ и верное в целом решение, в котором допущены мелкие погрешности или неточности*

− *приведен только ответ*

11.5. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, ребро основания которой равно 1. Из вершин A и B основания ABC проведены медианы боковых граней, не имеющие общих точек. Известно, что на прямых, содержащих эти медианы, лежат ребра некоторого куба. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Решение. Указанные медианы AD и BE боковых граней ASB и BSC лежат на скрещивающихся прямых, а скрещивающиеся ребра куба взаимно перпендикулярны. Тогда условие существования куба с ребрами на указанных прямых равносильно перпендикулярности этих прямых. Таким образом, требуется найти длину b бокового ребра пирамиды, у которой угол между скрещивающимися медианами боковых граней равен 90°. Возможны различные способы решения.

Первый способ. По формуле для вычисления медианы треугольника $AD = BE = \dfrac{\sqrt{2\cdot 1^2 + 2b^2 - b^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{b^2+2}}{2}$. При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{ED}$ образом медианы BE является отрезок FD (см. рис. 11.5а). Из треугольника ABF по теореме косинусов $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2 - 2AB\cdot BF\cdot\cos 120^\circ} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Треугольник ADF — прямоугольный и равнобедренный, поэтому $AF = AP\sqrt{2}$. Получим уравнение: $\dfrac{\sqrt{b^2+2}}{2}\cdot\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Его решением является $b = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Возможен также аналогичный способ вычисления, если от вершины S отложить отрезки параллельные данным медианам, длины которых равны удвоенной медиане.

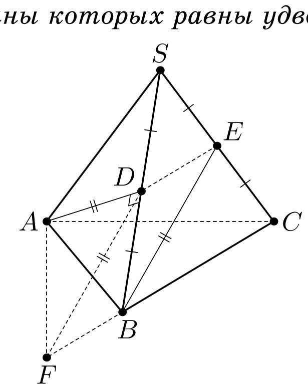

Рис. 11.5а

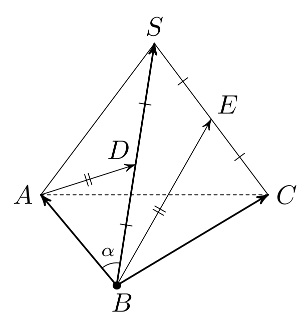

Рис. 11.5б

Второй способ. Пусть $\angle SBA = \angle SBC = \alpha$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BS}$ и выразим через них $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (см. рис. 11.5б). Тогда $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} - \overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BS} - 2\overrightarrow{BA}\right)\times$ $\times\left(\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BS}^2 + \overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BS} - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$.

Учитывая, что $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 1$ и $\left|\overrightarrow{BS}\right| = b$, получим:

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\left(b^2 + b\cdot 1\cdot\cos\alpha - 2b\cdot 1\cdot\cos\alpha - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ\right) = \frac{1}{4}\left(b^2 - b\cos\alpha - 1\right).$$

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$ будут перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0. Таким образом, $\dfrac{1}{4}\left(b^2 - b\cos\alpha - 1\right) = 0$.

Из треугольника ABS: $b\cos\alpha = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}$, значит, $b^2 = \dfrac{3}{2}$, то есть $b = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Векторный базис и вспомогательный угол можно ввести и по-другому, например, $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ и плоский угол при вершине S.

Возможен также способ решения, использующий вспомогательный объем.

Критерии проверки:

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

± *верный ход рассуждений, но при заключительном счете допущена арифметическая ошибка*

∓ *объяснено, почему задача сводится к условию перпендикулярности медиан, а дальнейшее решение отсутствует или содержит ошибки*

− *приведен только ответ*

11.6. На окружности отмечено 20 точек. Сколько существует таких троек хорд с концами в этих точках, что каждая хорда пересекает каждую (возможно, в концах)?

Ответ: 156180.

Решение. Концами искомых хорд могут являться 3, 4, 5 или 6 точек. Разберем эти случаи.

1) Концами хорд являются 3 точки (см. рис. 11.6а). Их можно выбрать C_{20}^3 способами. Соединить каждую тройку точек хордами попарно можно единственным способом.

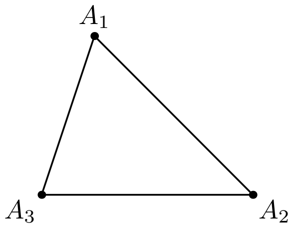

Рис. 11.6а

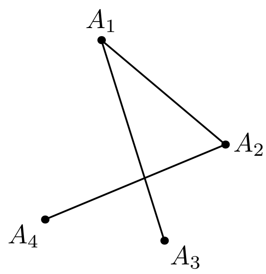

Рис. 11.6б

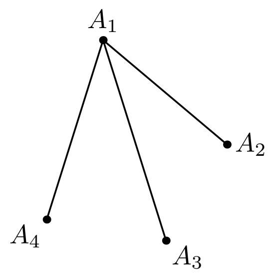

Рис. 11.6в

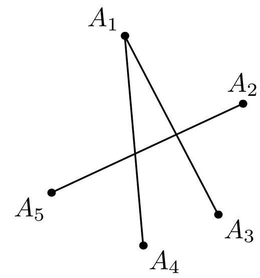

Рис. 11.6г

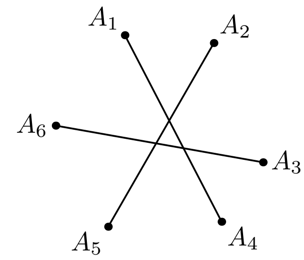

Рис. 11.6д

2) Концами хорд являются 4 точки. Возможны два случая взаимного расположения хорд (см. рис. 11.6б, в). Четыре точки можно выбрать C_{20}^4 способами. Для каждой четверки точек существует 8 способов их соединить хордами попарно.

3) Концами хорд являются 5 точек. В этом случае ровно две хорды имеют общую вершину, третья хорда соединяет две оставшиеся точки (см. рис. 11.6д). Пять точек можно выбрать C_{20}^5 способами. Для каждой пятерки точек существуют пять вариантов проведения хорд (по количеству точек, в которых сходятся две хорды).

4) Концами хорд являются 6 точек (см. рис. 11.6е). Шесть точек можно выбрать C_{20}^6 способами. Для каждой шестерки точек есть единственный способ проведения хорд, так как хорды должны попарно пересекаться во внутренних точках.

Таким образом, всего способов проведения хорд будет

$$C_{20}^3 + C_{20}^4 \cdot 8 + C_{20}^5 \cdot 5 + C_{20}^6 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{2 \cdot 3} + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} =$$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{2 \cdot 3} \left(1 + 34 + \frac{17 \cdot 16}{4} + \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{4 \cdot 5 \cdot 6}\right) = 10 \cdot 19 \cdot 6 \cdot (35 + 68 + 34) = 10 \cdot 19 \cdot 6 \cdot 137 = 156180.$$

Ответ может быть оставлен в виде $C_{20}^3 + C_{20}^4 \cdot 8 + C_{20}^5 \cdot 5 + C_{20}^6$.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *верно разобраны все случаи, но при итоговом подсчете допущена арифметическая ошибка*

$\mp$ *верно разобраны какие-то отдельные случаи*

$-$ *приведен только ответ*