10 класс

10.1. Первый член последовательности равен 934. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Найдите 2013-й член последовательности.

Ответ: 130.

Решение. Вычислим несколько первых членов последовательности. Получим: $a_1 = 934$; $a_2 = 16 \times 13 = 208$; $a_3 = 10 \times 13 = 130$; $a_4 = 4 \times 13 = 52$; $a_5 = 7 \times 13 = 91$; $a_6 = 10 \times 13 = 130 = a_3$. Так как при вычислении каждого следующего числа используется только предыдущее число, то далее члены последовательности будут повторяться с периодом 3. Число 2013 кратно трем, поэтому $a_{2013} = a_3 = 130$.

Критерии проверки:

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верные, в целом, рассуждения, в которых есть незначительные пробелы или неточности*

$\mp$ *приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка*

$-$ *приведен только ответ*

10.2. Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + bx + c$ равны m_1 и m_2, а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + px + q$ равны k_1 и k_2. Докажите, что $f(k_1) + f(k_2) + g(m_1) + g(m_2) \geqslant 0$.

Решение. Обозначим: $A = f(k_1) + f(k_2) + g(m_1) + g(m_2)$.

Первый способ. Выразим A через корни данных трехчленов.

Так как $f(x) = x^2 + bx + c = (x - m_1)(x - m_2)$, $g(x) = x^2 + cx + d = (x - k_1)(x - k_2)$, то $f(k_1) + f(k_2) = (k_1 - m_1)(k_1 - m_2) + (k_2 - m_1)(k_2 - m_2)$, $g(m_1) + g(m_2) = (m_1 - k_1)(m_1 - k_2) + (m_2 - k_1)(m_2 - k_2)$.

Тогда, сгруппировав слагаемые и вынеся общие множители за скобки, получим:

$$A = (k_1 - m_1)(k_1 - m_2 - m_1 + k_2) + (k_2 - m_2)(k_1 - m_2 - m_1 + k_2) = (k_1 - m_2 - m_1 + k_2)^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось.

Второй способ. Выразим A через коэффициенты данных трехчленов. Тогда

$$f(k_1) + f(k_2) = k_1^2 + bk_1 + c + k_2^2 + bk_2 + c = k_1^2 + k_2^2 + b(k_1 + k_2) + 2c = (k_1 + k_2)^2 - 2k_1k_2 + b(k_1 + k_2) + 2c.$$

Из теоремы Виета для квадратного трёхчлена $g(x)$ следует, что $k_1 + k_2 = -p$, $k_1 \cdot k_2 = q$.

Следовательно, $f(k_1) + f(k_2) = p^2 - 2q - bp + 2c$.

Аналогично, $g(m_1) + g(m_2) = b^2 - 2c - pb + 2q$. Следовательно, $A = f(k_1) + f(k_2) + g(m_1) + g(m_2) = p^2 - 2q - bp + 2c + b^2 - 2c - pb + 2q = p^2 - 2bp + b^2 = (p - b)^2 \geqslant 0$, что и требовалось.

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верные, в целом, рассуждения, в которых есть незначительные пробелы или неточности*

$\mp$ *использованы верные идеи преобразования выражения, но допущены ошибки, либо решение не доведено до конца*

$-$ *рассмотрены только частные случаи*

10.3. Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведен перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

Ответ: $45°$.

Решение. Пусть прямая AE пересекает сторону CD квадрата в точке M (см. рис. 10.3). Тогда треугольники ADM и DCF равны (по катету и острому углу). Следовательно, точка M — середина стороны CD. Тогда треугольник CFM — прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle CMF = 45°$.

Так как $\angle MEF = \angle MCF = 90°$, то вокруг четырехугольника $MCFE$ можно описать окружность. Вписанные углы CEF и CMF опираются на одну и ту же дугу этой окружности, значит, $\angle CEF = \angle CMF = 45°$.

Существуют также «вычислительные» способы решения, например, использующие координаты или векторы.

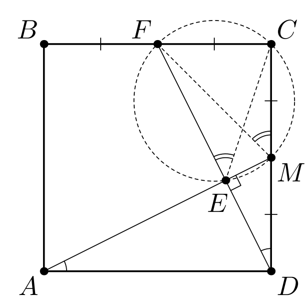

Рис. 10.3

Критерии проверки:

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$-$ *приведен только ответ*

10.4. Найдите наибольшее значение выражения $a + b + c + d - ab - bc - cd - da$, если каждое из чисел a, b, c и d принадлежит отрезку $[0; 1]$.

Ответ: 2.

Решение. *Первый способ.* Значение 2 достигается, например, если $a = c = 1$, $b = d = 0$. Докажем, что при заданных значениях переменных $a + b + c + d - ab - bc - cd - da \leqslant 2$.

Заметим, что $a + b + c + d - ab - bc - cd - da = (a + c) + (b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $a + c = x$, $b + d = y$, тогда требуется доказать, что $x + y - xy \leqslant 2$, если $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Действительно, $x + y - xy = (x + y - xy - 1) + 1 = (x - 1)(1 - y) + 1$, где $-1 \leqslant x - 1 \leqslant 1$ и $-1 \leqslant 1 - y \leqslant 1$. Следовательно, $(x - 1)(1 - y) \leqslant 1$, поэтому $x + y - xy \leqslant 2$.

Введя новые переменные, можно рассуждать иначе. Зафиксируем переменную y и рассмотрим функцию $f(x) = (1-y)x+y$, где $x \in [0; 2]$. Так как она — линейная, то ее наибольшее значение достигается на одном из концов отрезка $[0; 2]$. Но $f(0) = y \leqslant 2$ и $f(2) = 2 - y \leqslant 2$, значит, при всех $x \in [0; 2]$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant 2$.

Второй способ. Ту же идею линейности можно использовать изначально. Данное выражение можно считать линейной функцией от одной из переменных, если три остальные переменные зафиксировать.

Например, зафиксируем значения переменных b, c и d и рассмотрим функцию $f(a) = (1 - b - d)a + b + c + d - bc - cd$, где $a \in [0; 1]$. В силу монотонности, ее наибольшее значение достигается на одном из концов отрезка $[0; 1]$. Аналогичная ситуация возникнет и для заданных таким же образом линейных функций от переменных b, c и d.

Следовательно, наибольшее значение исходного выражения может достигаться только в том случае, когда переменные a, b, c и d принимают одно из двух значений: 0 или 1. Учитывая симметричность данного выражения, достаточно теперь проверить следующие случаи:

1) если $a = b = c = d = 0$ или $a = b = c = d = 1$, то значение выражения равно 0;
2) если $a = b = c = 0$, $d = 1$ или $a = b = c = 1$, $d = 0$, то значение выражения равно 1;
3) если $a = b = 0$, $c = d = 1$ или $a = b = 1$, $c = d = 0$, то значение выражения равно 1;
4) если $a = c = 0$, $b = d = 1$ или $a = c = 1$, $b = d = 0$, то значение выражения равно 2.

Таким образом, наибольшее значение данного выражения равно 2.

Критерии проверки:

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

± *приведены верный ответ и верные, в целом, рассуждения, в которых есть незначительные пробелы или неточности (например, доказана оценка, но отсутствует пример)*

∓ *приведен верный ход рассуждений, но допущена вычислительная ошибка*

∓ *есть идея линейности, но она не доведена до конца*

∓ *приведены верный ответ и указано, при каких значениях переменных он может достигаться, но оценка не проведена*

− *приведен только ответ*

10.5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне AC — точка M. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что углы APB, BPC и CPA равны по 120°, а площадь четырехугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC. Найдите угол BAC.

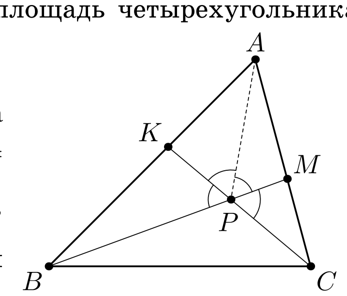

Рис. 10.5

Ответ: 60°.

Решение. К обеим частям равенства $S_{AKPM} = S_{BPC}$ прибавим площадь треугольника BPK (см. рис. 10.5). Получим, что $S_{ABM} = S_{BCK}$. Следовательно, $\frac{1}{2}BC \cdot BK \sin\angle B = \frac{1}{2}AB \cdot AM \sin\angle A$. Тогда $\frac{BK}{AM} = \frac{AB\sin\angle A}{BC\sin\angle B}$. Из теоремы синусов: $\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = \frac{BC}{AC}$, значит, $\frac{BK}{AM} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{AM}{AC}$. Таким образом, точки K и M делят отрезки BA и AC в одном и том же отношении, считая от вершин B и A соответственно, то есть $\frac{BK}{KA} = \frac{AM}{MC}$ $(*)$.

Заметим теперь, что $\angle BPK = \angle KPA = \angle APM = \angle MPC = 60^\circ$ (углы, смежные с данными углами по 120°). Значит, PK и PM — биссектрисы треугольников APB и APC соответственно. По свойству биссектрисы треугольника получим: $\frac{BK}{KA} = \frac{BP}{PA}$ и $\frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC}$. Тогда, с учетом равенства $(*)$ получим, что $\frac{BP}{PA} = \frac{AP}{PC}$.

Кроме того, $\angle BPA = \angle APC = 120^\circ$. Таким образом, треугольники BPA и APC подобны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle PAC = \angle PBA$. Значит, $\angle BAC = \angle BAP + \angle PAC = \angle BAP + \angle PBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Критерии проверки:

+ *приведено полное обоснованное решение*

∓ *получено только, что точки K и M делят стороны в одном и том же отношении*

− *приведен только ответ*

10.6. В клетки таблицы размером 9×9 расставили все натуральные числа от 1 до 81. Вычислили произведения чисел в каждой строке таблицы и получили набор из девяти чисел. Затем вычислили произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получили набор из девяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: нет, не могли.

Решение. Каждое из произведений чисел, стоящих в девяти строках таблицы, представим в виде произведения простых множителей. Выпишем все простые числа, большие, чем 40, но меньшие, чем 81: 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79. Заметим, что каждое из этих десяти чисел может встретиться только в одном из этих девяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них, превышают 81. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n.

Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Критерии проверки:

+ *приведено полное обоснованное решение*

∓ *в решении есть идея рассмотрения простых чисел, лежащих между 40 и 81, не доведенная до конца*

− *приведен только ответ*