

## Возможные решения

### 9 класс

#### Задача 1. Скорость погружения стакана

Объем воды, ежесекундно поступающей в стакан,

$$V_1 = \frac{\mu}{\rho} = 14 \text{ см}^3/\text{с}.$$

Скорость погружения стакана в воду (относительно её поверхности)

$$v_1 = \frac{4V_1}{\pi d^2}.$$

Скорость подъема уровня воды в цилиндре (относительно дна цилиндра)

$$v_2 = \frac{4V_1}{\pi D^2}.$$

Относительно дна сосуда стакан будет погружаться со скоростью

$$v = v_1 - v_2 = \frac{4V_1(D^2 - d^2)}{\pi d^2 D^2} = 1 \text{ мм/с}.$$

#### Критерии оценивания

Найден расход $V_1$ воды.....	1
Найдена скорость погружения стакана в воду.....	3
Найдена скорость подъёма уровня воды в сосуде.....	3
Получена относительная скорость.....	2
Получен числовой ответ.....	1

#### Задача 2.

Введём следующие обозначения:

$C$  — теплоёмкость неизвестной жидкости и сосуда,

$c_m$  — удельная теплоёмкость материала опилок,

$V_m$  — объём опилок, засыпанных в первый сосуд,

$V'_m = 10V_m$  — объём опилок, засыпанных во второй сосуд,

$V_B$  — объём воды, залитой в первый сосуд,

$\rho_B = 1,00 \text{ г/см}^3$  — плотность воды,

$\Delta t'_1 = \Delta t'_2$  — изменение температуры воды и опилок во втором случае.

Запишем уравнения теплового баланса для первого и второго случаев:

$$\begin{cases} (C + c_B \rho_B V_B) \Delta t_1 = c_m \rho_m V_m \Delta t_2, \\ C \Delta t'_1 = c_m \rho_m V'_m \Delta t'_2. \end{cases} \quad (1)$$

Объём свободного пространства в каждом из сосудов (до того, как туда что-либо налили или насыпали):  $V_{св} = V_B + V_m = V'_m$ , откуда  $V_B = V'_m - V_m = 9V_m$ .

Подставив полученную связь объёмов в уравнения системы (1), преобразуем их и получим

$$\begin{cases} \frac{C}{\rho_m} + 9c_B V_m \frac{\rho_B}{\rho_m} = c_m V_m \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}, \\ \frac{C}{\rho_m} = 10c_m V_m \frac{\Delta t'_2}{\Delta t'_1}. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, придём к равенству

$$9c_B V_m \frac{\rho_B}{\rho_m} = c_m V_m \left( \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} - 10 \frac{\Delta t'_2}{\Delta t'_1} \right) = 20c_m V_m,$$

откуда

$$c_m = \frac{9}{20} \frac{\rho_B}{\rho_m} c_B = 1,1 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C}).$$

Такими теплоёмкостью и плотностью обладает магний.

#### Критерии оценивания

Связь объёмов $V_B = 9V_m$ .....	2
Уравнения теплового баланса для первого случая.....	2
Уравнения теплового баланса для второго случая.....	2
Получено любое уравнение для $c_m$ , не содержащее неизвестных величин..	3
Конечный числовой ответ.....	1

#### Задача 3. Яблоко времени

В системе отсчёта, связанной с Вовочкой, время подъёма часов равно

$$t_1 = \frac{v_0}{g},$$

где  $v_0$  — начальная скорость яблока. В системе отсчёта Марьиванны вертикальная компонента начальной скорости яблока уменьшится на удвоенную вертикальную компоненту скорости эскалатора (по модулю), поэтому время подъёма составит

$$t_2 = \frac{v_0 - 2u \sin \alpha}{g}.$$

Зная разность показаний часов

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2u \sin \alpha}{g},$$

находим скорость эскалаторов:

$$u = \frac{g\Delta t}{2 \sin \alpha} \approx 0,7 \text{ м/с.}$$

**Критерии оценивания**

Записано выражение для времени подъёма яблока  $t_1$  в системе отсчёта Вовочки.....2  
 Найдена вертикальная скорость яблока в системе отсчёта Марьиванны.....2  
 Записано выражение для времени подъёма яблока  $t_2$  в системе отсчёта Марьиванны.....2  
 Записана связь  $\Delta t$  и  $u$ .....3  
 Дан числовой ответ.....1

**Задача 4.**

Поскольку удары мячика о пол абсолютно упругие, и трение отсутствует, траектория мячика — совокупность частей парабол (рис. 12). Запишем уравнения движения для участка траектории  $ABCD$  в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha) t, \\ y = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Выразив  $y$  через  $x$ , получим уравнение траектории:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = x - \frac{gx^2}{v_0^2}. \quad (2)$$

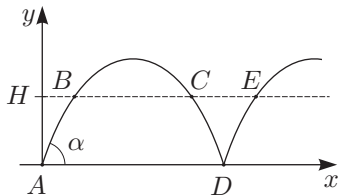


Рис. 12

Расстояние  $d$  будет минимально, если шарик пролетит через кольца либо в точках траектории  $B$  и  $C$ , либо в точках  $C$  и  $E$ . Значит,  $d$  — это длина меньшего из отрезков  $BC$  и  $CE$ . Для нахождения  $x$ -координат точек  $B$  и  $C$ , приравняем правую часть уравнения (2) к  $H$ . Решив получившееся квадратное уравнение, найдём:

$$x_{B,C} = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \beta} \right), \quad \text{где } \beta = \frac{4gH}{v_0^2} < 1,$$

откуда

$$BC = x_C - x_B = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 - \beta}, \quad CE = 2x_B = \frac{v_0^2}{g} \left( 1 - \sqrt{1 - \beta} \right).$$

Случай, когда  $BC < CE$  реализуется при  $\sqrt{1 - \beta} < 1/2$ , то есть при  $\beta > 3/4$ . Если  $\beta \leq 3/4$ , то  $d = CE$ . Окончательный ответ:

$$d = \begin{cases} = CE = \frac{v_0^2}{g} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4gH}{v_0^2}} \right), & \frac{gH}{v_0^2} \leq \frac{3}{16}; \\ = BC = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 - \frac{4gH}{v_0^2}}, & \frac{gH}{v_0^2} > \frac{3}{16}; \end{cases}$$

В случае, когда  $gH \ll v_0^2$ , то есть  $\beta \ll 1$

$$d = \frac{v_0^2}{g} \left( 1 - \sqrt{1 - \beta} \right) = \frac{v_0^2}{g} \left( \frac{1 - 1 + \beta}{1 + \sqrt{1 - \beta}} \right) \approx \frac{v_0^2}{2g} \beta = 2H.$$

Тот же ответ может быть получен из простых геометрических соображений: следует заменить рассматриваемый участок траектории  $CDE$  двумя отрезками прямых (рис. 13).

**Критерии оценивания**

В решении присутствует идея, что  $d$  — это длина меньшего из отрезков  $BC$  и  $CE$ .....1  
 Получено уравнение траектории.....2  
 Получено выражение для  $x_{B,C}$ .....2  
 Правильно найдена длина  $BC$ .....1  
 Правильно найдена длина  $CE$ .....1  
 Указаны условия реализации соответствующих случаев.....1  
 Любым способом получено  $d \approx 2H$  при  $gH \ll v_0^2$ .....2

**Задача 5. Вольтметры и амперметры**

Сила тока, протекающего через вольтметр  $V_2$

$$i_2 = I_2 - I_1.$$

Сопротивление вольтметра

$$R_V = \frac{U_2}{i_2} = \frac{U_2}{I_2 - I_1}.$$

Сила тока, протекающего через вольтметр  $V_1$

$$i_1 = \frac{U_1}{R_V} = \frac{U_1}{U_2} (I_2 - I_1).$$

Сила тока, протекающего через резистор

$$I_R = I_1 - i_1 = I_1 - \frac{U_1}{U_2}(I_2 - I_1).$$

Сопротивление резистора

$$R = \frac{U_1}{I_R} = \frac{U_1 U_2}{U_2 I_1 - (I_2 - I_1) U_1}.$$

Числовое значение сопротивления резистора

$$R = 323 \text{ Ом.}$$

*Критерии оценивания*

Получено выражение для $i_2$ . . . . .	2
Найдено сопротивление вольтметра . . . . .	2
Найдена сила тока, протекающего через вольтметр $V_1$ . . . . .	1
Найдена сила тока, протекающего через резистор . . . . .	2
Получено выражение для сопротивления резистора . . . . .	2
Получено числовое значение для $R$ . . . . .	1