11 класс

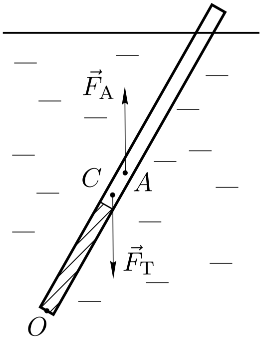

Рис. 28

Задача 1. Стержень и вода

Пусть S — площадь сечения стержня. Вес воды в объёме стержня:

$$P = \rho_0(l_1 + l_2)gS.$$

Вес стержня:

$$P_0 = (\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2)gS.$$

Стержень не будет тонуть, если $P > P_0$, откуда находим:

$$l_2 > l_1 = 10 \text{ см}.$$

Для того, чтобы стержень плавал вертикально, необходимо, чтобы при малом наклоне стержня возникал вращающий момент, стремящийся вернуть его в вертикальное положение. Это возможно, если точка приложения силы Архимеда $\vec{F}_{\text{A}}$ находится выше точки приложения силы тяжести $\vec{F}_{\text{T}}$, то есть геометрический центр A погружённой части расположен выше центра тяжести C стержня (рис. 28). Это условие можно представить в виде:

$$OA > OC. \tag{14}$$

Обозначим за L глубину подводной части стержня. Тогда:

$$L = \frac{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2}{\rho_0} = \frac{3}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_2,$$

$$OA = \frac{L}{2} = \frac{1}{4}(3l_1 + l_2).$$

По определению расстояние от точки O до центра масс равно:

$$OC = \frac{\rho_1 l_1(l_1/2) + \rho_2 l_2(l_1 + l_2/2)}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2} = \frac{3l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2}{2(3l_1 + l_2)}.$$

В этих обозначениях условие (14) примет вид:

$$(3l_1 + l_2)^2 > 2(3l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2),$$

$$3l_1^2 + 2l_1 l_2 - l_2^2 < 0.$$

С учётом того, что $l_2 > 0$, получаем ограничение сверху:

$$l_2 < 3l_1 = 30 \text{ см}.$$

Окончательный ответ:

$$10\ \text{см} < l_2 < 30\ \text{см}.$$

Критерии оценивания

Найдена минимальная длина l_2, при которой стержень не тонет 3
Записано условие устойчивого плавания стержня 1
Получено выражение для расстояния OA 2
Найдено расстояние от точки O до центра масс 2
Решено неравенство относительно l_2 1
Приведён окончательный ответ 1

Задача 2. Грузы и блоки

Пусть к тому моменту, когда уголок проедет расстояние l, его скорость станет равной v. Произвольная точка A на нижней части нити будет двигаться влево с той же по модулю скоростью (рис. 29).

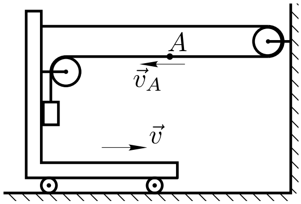

Рис. 29

В системе отсчёта, связанной с уголком, точка A и брусок будут иметь скорость $2v$. Значит, к интересующему нас моменту времени груз m опустится вниз на расстояние $2l$.

Запишем закон сохранения энергии:

$$mg \cdot 2l = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m\left[v^2 + (2v)^2\right],$$

откуда:

$$v^2 = \frac{4mgl}{M+5m}. \tag{15}$$

Из кинематики известно, что при равноускоренном движении из состояния покоя:

$$a = \frac{v^2}{2l}. \tag{16}$$

Решая совместно уравнения (15) и (16), получим:

$$a = g \cdot \frac{2m}{M+5m}.$$

Критерии оценивания

Отмечено, что смещение уголка на l соответсвует смещению груза на $2l$ 3
Записан закон сохранения энергии или эквивалентная система уравнений Ньютона 4
Указана кинематическая связь величин a, l и v 1
Решена система и найдено ускорение a 3

Если при записи кинетической энергии груза не учтено, что он имеет горизонтальную составляющую скорости v, то за решение задачи ставить не выше 5 баллов.

Задача 3. Потерянные оси

Внутренняя энергия газа является функцией состояния, поэтому её изменение в процессе $1 \to 2 \to 3$ равно:

$$\Delta U_{1\to 2\to 3} = \nu C_V (T_3 - T_1) = \frac{C_V}{R}(p_3 V_3 - p_1 V_1) = \frac{C_V}{R}(p_3 - p_1)V_1.$$

Работа, совершённая над газом в процессе $1 \to 2 \to 3$, численно равна площади треугольника $1 \to 2 \to 3$:

$$A_{1\to 2\to 3} = -\frac{(p_3 - p_1)\Delta V}{2}.$$

По первому закону термодинамики:

$$A_{1\to 2\to 3} + \Delta U_{1\to 2\to 3} = Q_{1\to 2\to 3} = 0.$$

Отсюда следует, что:

$$-\frac{(p_3 - p_1)\Delta V}{2} + \frac{C_V}{R}(p_3 - p_1)V_1 = 0.$$

С учётом того, что для азота $C_V = 5R/2$, мы получаем:

$$5V_1 = \Delta V, \qquad \text{или} \qquad V_1 = \Delta V/5.$$

Это и есть искомое расстояние от оси p (давлений) до изохоры $1 \to 3$.

Критерии оценивания

Записано выражение для изменения внутренней энергии 3
Записано выражение для работы, совершённой над газом 3
Записан первый закон термодинамики 1
Найдено расстояние от оси p (давлений) до изохоры $1 \to 3$ 3

Задача 4. Переменный резистор

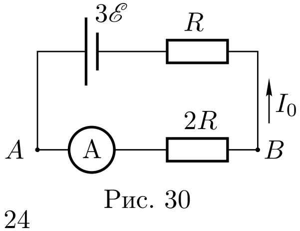

Рис. 30

Мысленно отсоединим часть цепи, содержащую батарейку с ЭДС $2\mathscr{E}$. Тогда сила тока, протекающего в оставшемся контуре (рис. 30), будет равна:

$$I_0 = \frac{3\mathscr{E}}{R + 2R} = \frac{\mathscr{E}}{R}.$$

Найдём разность потенциалов между точками A и B:

$$\varphi_A - \varphi_B = 3\mathscr{E} - I_0 R = 3\mathscr{E} - \frac{\mathscr{E}}{R} R = 2\mathscr{E}.$$

Поскольку ЭДС $2\mathscr{E}$ в точности равна разности потенциалов $(\varphi_A - \varphi_B)$, то подключение этой батареи к зажимам A и B не изменит разность потенциалов, и в этой ветви сила тока будет равна нулю:

$$(\varphi_A - \varphi_B) - 2\mathscr{E} = 0 = I_2 R_x.$$

Следовательно, изменение сопротивления резистора R_x не повлияет на силу тока, проходящего через амперметр.

Критерии оценивания

Найдена разность потенциалов $(\varphi_A - \varphi_B)$ 6
Подмечено, что $(\varphi_A - \varphi_B) = 2\mathscr{E}$ 2
Сделан вывод, что I_A не зависит от сопротивления резистора R_x 2

Задача 5. Диод в колебательном контуре

По истечению большого промежутка времени конденсаторы зарядятся до некоторых напряжений U_C, U_{2C} и ток в цепи прекратится. Запишем второе правило Кирхгофа и закон сохранения заряда:

$$\mathscr{E} = U_C + U_{2C}, \tag{17}$$

$$CU_C = 2CU_{2C}. \tag{18}$$

Отсюда получим ответ на первый вопрос:

$$U_{2C} = \frac{\mathscr{E}}{3}. \tag{19}$$

Работа источника тока равна:

$$A = \mathscr{E}\Delta q, \tag{20}$$

Так как $\Delta q = 2CU_{2C}$, то:

$$A = \mathscr{E} \cdot 2C \cdot \frac{\mathscr{E}}{3} = 2C\frac{\mathscr{E}^2}{3}. \tag{21}$$

После размыкания ключа K_1 и замыкания ключа K_2, пока диод открыт, в цепи будут происходить свободные затухающие колебания. По условию задачи энергия, которая выделяется в колебательном контуре за один период, намного меньше начальной энергии, запасённой в конденсаторе $2C$, следовательно можно считать, что за первый полупериод колебания гармонические, то есть сила тока в цепи изменяется по закону:

$$I = I_a \sin \omega t, \tag{22}$$

Так как затухания малы:

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{2LC}.$$

Найдём амплитуду I_a. По закону сохранения энергии:

$$\frac{2CU_{2C}^2}{2} = \frac{LI_a^2}{2}. \tag{23}$$

Из равенств (19) и (23) получим:

$$I_a = \mathscr{E}\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{2C}{L}} = \frac{2}{3}\mathscr{E}\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{24}$$

После одного полупериода, когда сила тока в цепи обратится в ноль, напряжение на диоде станет отрицательным и диод закроется, поэтому ток в цепи прекратится. Запишем аналитически зависимость силы тока от времени:

$$I = I_a \sin \omega t \qquad \text{при} \qquad t \leqslant T/2,$$

$$I = 0 \qquad \text{при} \qquad t \geqslant T/2.$$

Построим график зависимости силы тока I в цепи от времени t, учитывая, что затухания малы (рис. 31).

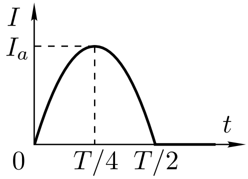

Рис. 31

Зная зависимость силы тока от времени, найдём количество теплоты, которая выделится на катушке индуктивности:

$$Q_L = \int\limits_0^{T/2} I^2 R dt = I_a^2 R \int\limits_0^{T/2} (\sin \omega t)^2 dt = I_a^2 R \cdot \frac{T}{4}, \tag{25}$$

$$T \approx 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{2LC}.$$

Подставив (24) в (25), получим:

$$Q_L = I_a^2 R \cdot T/4 = \mathscr{E}^2 \frac{2}{9}\frac{C}{L} R \frac{2\pi\sqrt{2LC}}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{9}\sqrt{\frac{C^3}{L}} R\mathscr{E}^2.$$

В установившемся режиме падение напряжения на диоде будет равно напряжениию на конденсаторе, но с противоположным знаком, то есть:

$$U_D = -U_{2C(\text{уст})} \approx -\frac{\mathscr{E}}{3}.$$

Критерии оценивания

Найдено выражение для напряжения на конденсаторе 2C 2
Найдено выражение для работы батареи 2
Найдено амплитудное значение I_a силы тока 1
Найдена зависимость силы тока в цепи от времени 1
Построен график зависимости силы тока от времени 1
Найдено выражение для количества теплоты Q_R 2
Найдено конечное напряжение U_D на диоде 1