Условия и решения задач

9 класс

9.1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны? (*Л. Емельянов*)

Ответ. Нет, неверно.

Решение. Подойдёт, например, тройка 1/3, 1/3, 2/3.

Замечание. Все такие тройки можно получить, решив соответствующую систему: $a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c$. Из первых двух равенств имеем $a^2 - a = b^2 - b$; перенося всё в левую часть, получаем $(a - b)(a + b - 1) = 0$. Значит, $a = b$ или $b = 1 - a$; аналогичные утверждения верны для остальных пар чисел. Итого, кроме троек из равных чисел, подходят все тройки вида $a, a, 1 - a$ и только они.

9.2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC. Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны. (*Р. Женодаров*)

Решение. Обозначим через Ω и ω описанные окружности треугольников ABC и BDE. Положим $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Четырёхугольник $BDAC$ вписан в Ω, значит, $\angle ADB = 180° - \angle ACB = 180° - \alpha$. Углы ADB и EDB — смежные, откуда $\angle EDB = 180° - \angle ADB = \alpha$.

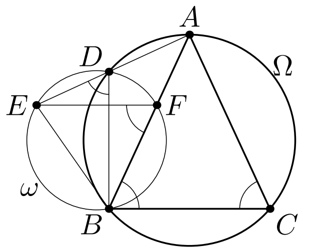

Рис. 1

Далее, поскольку четырёхугольник $EDFB$ вписан в ω, имеем $\angle EFB = \angle EDB = \alpha$.

Итого, $\angle EFB = \angle FBC = \alpha$, а значит, прямые EF и BC параллельны.

9.3. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей. (*Д. Храмцов*)

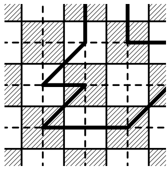

Рис. 2

Решение. Проведём пунктиром вертикальные и горизонтальные линии через центры клеток доски. На получившейся пунктирной сетке каждое звено нашей ломаной соединяет узлы, соседние по вертикали, горизонтали или диагонали. Поэтому пунктирные прямые разбивают область, ограниченную ломаной, на единичные квадратики и половинки квадратиков, получаемые разрезанием их по диагонали.

Осталось заметить, что в каждом таком квадратике и в каждом таком треугольнике площади чёрной и белой частей равны. Действительно, каждый квадратик содержит по две четверти клеток обоих цветов, а треугольник — четверть клетки одного цвета и два треугольничка, каждый из которых составляет восьмую часть клетки другого цвета.

Комментарий. Рассмотрение некоторых конкретных ломаных без описания общей идеи решения — 0 баллов.

9.4. Даны положительные числа x, y, z. Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leqslant \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

(*А. Храбров, Б. Трушин*)

Решение. Заметим, что $\dfrac{a+1}{b+1} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{b-a}{b(b+1)}$ для любых положительных a и b. Значит, после переноса всех членов в левую часть требуемое неравенство приобретает вид

$$\frac{y-x}{y(y+1)} + \frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Можно считать, что x — наибольшее из трёх данных чисел. Возможны два случая.

Случай 1. $y \geqslant z$. В этом случае имеем

$$\frac{x-y}{x(x+1)} \leqslant \frac{x-y}{y(y+1)}, \quad \frac{y-z}{x(x+1)} \leqslant \frac{y-z}{z(z+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant -\frac{y-x}{y(y+1)} - \frac{z-y}{z(z+1)},$$

что равносильно (1).

Случай 2. $y < z$. Тогда имеем

$$\frac{z-y}{z(z+1)} \leqslant \frac{z-y}{y(y+1)}, \quad \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant \frac{x-z}{y(y+1)}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant -\frac{y-x}{y(y+1)},$$

что опять же равносильно (1).

Комментарий. Существуют два различных варианта упорядочения переменных, с точностью до циклической перестановки (в авторском решении это варианты $x \geqslant y \geqslant z$ и $x \geqslant z \geqslant \geqslant y$). Правильное рассмотрение только одного из таких случаев — ставить 3 балла.