10 класс

10.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым. (*О. Подлипский*)

Ответ. $a = \frac{k}{6}$, где k — любое целое число.

Решение. Подставив $n = 1$, $n = 3$ и $n = 4$, получаем, что числа $60a$, $630a$ и $24 \cdot 56a$ — целые. Значит, a — рациональное число, знаменатель q которого в несократимой записи является делителем чисел 60, 630 и $24 \cdot 56$. Следовательно, их наибольший общий делитель также делится на q. Поскольку НОД$(60, 630) = 30$, а $24 \cdot 56$ не делится на 5, то q — делитель числа 6, и $a = k/6$ при некотором целом k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чисел $n+2$, $n+3$, $n+4$ делится на 3, а одно из последовательных чисел $n+2$, $n+3$ делится на 2; значит, $n(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 2 и на 3, а значит, и на 6. Поэтому $an(n+2)(n+3)(n+4) = k\,\frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$ — целое число.

Комментарий. Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число a обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

10.6. На доску выписаны 2011 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел? (*И. Богданов*)

Ответ. 2009.

Решение. Положим $n = 2011$. Упорядочим выписанные числа в неубывающем порядке: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Поскольку число $a_1 + a_2 + a_3$ выписано, то $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant a_1$, откуда $a_2 + a_3 \geqslant 0$. Аналогично получаем $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \leqslant a_n$, откуда $a_{n-2} + a_{n-1} \leqslant 0$. Итак, $0 \geqslant a_{n-2} + a_{n-1} \geqslant a_2 + a_3 \geqslant 0$; значит, $a_2 + a_3 = a_{n-2} + a_{n-3} = 0$. Так как $a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_{n-2} \leqslant a_{n-1}$, отсюда вытекает, что $a_2 = a_3 = a_{n-2} = a_{n-1}$, а значит, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Итак, среди выписанных чисел хотя бы 2009 нулей.

Пример из 2009 нулей и чисел 1, -1 показывает, что нулей может быть ровно 2009.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что нулей может быть ровно 2009 — 1 балл.

Доказано только, что нулей должно быть не меньше 2009 — 5 баллов.

Показано только, что $a_2 + a_3 \geqslant 0$ (или $a_{n-1} + a_{n-2} \leqslant 0$) — 1 балл.

Показано только, что среди выписанных чисел не более двух положительных и/или не более двух отрицательных — 3 балла.

10.7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 — в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

(*Л. Емельянов*)

Решение. Положим $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle BAC$; тогда $AB' = c\cos\alpha$, $AC' = b\cos\alpha$. Пусть BB' и CC' — высоты треугольника. Так как OB_0 и OC_0 — серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB, то отрезки $B'B_0$ и $C'C_0$ равны высотам ромба $OPHQ$, значит, $B'B_0 = C'C_0$, откуда $|AB_0 - AB'| = |AC_0 - AC'|$, или

$$\left|\frac{b}{2} - c\cos\alpha\right| = \left|\frac{c}{2} - b\cos\alpha\right|. \qquad (*)$$

В случае, если в левой и правой частях модули раскрываются с одним знаком, имеем $\frac{b}{2} - c\cos\alpha = \frac{c}{2} - b\cos\alpha$, т.е. $b\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right) = c\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right)$. По условию $\alpha < 90^\circ$, поэтому $\cos\alpha > 0$ и, значит, $b = c$, что противоречит условию.

Предположим теперь, что модули в равенстве $(*)$ раскрываются с разными знаками, скажем, $\frac{b}{2} - c\cos\alpha > 0$ и $\frac{c}{2} - b\cos\alpha < 0$

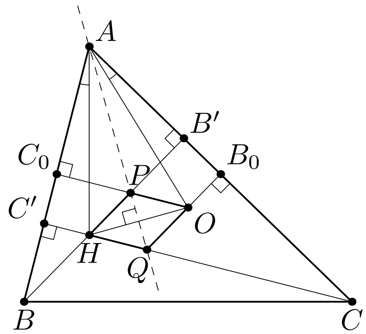

Рис. 2

(геометрически это означает, что точка B' лежит между A и B_0, а точка C_0 — между A и C', см. рис. 2). Тогда $\frac{b}{2} - c\cos\alpha = b\cos\alpha - \frac{c}{2}$, или $\frac{b+c}{2} = (b+c)\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Таким образом, $\alpha = 60^\circ$.

Тогда $AC' = b\cos\alpha = \frac{b}{2} = AB_0$, значит, точки B_0 и C' симметричны относительно биссектрисы угла BAC. Тогда прямые OB_0 и CC' также симметричны, и их точка пересечения Q лежит на биссектрисе угла BAC. Аналогично, точка P лежит на биссектрисе угла BAC.

Замечание. Для всевозможных неравнобедренных треугольников параллелограмм $OPHQ$ является ромбом только при $\angle BAC = 60^\circ$ или $\angle BAC = 120^\circ$. В последнем случае точки A, P и Q также лежат на одной прямой.

Комментарий. Показано только, что в любом треугольнике $OPHQ$ — параллелограмм — 0 баллов.

Доказано, что $B'B_0 = C'C_0$ — 1 балл.

Не рассмотрена возможность раскрытия модулей с разными знаками (в геометрических терминах — не рассмотрен случай, когда одна из точек B', C' лежит внутри, а другая — вне отрезка от A до середины соответствующей стороны) — ставится не более 1 балла за всю задачу.

Из условия выведено, что $\angle BAC = 60^\circ$ — 4 балла.

10.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров.

При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника? (*А. Магазинов*)

Ответ. $N = 102$.

Решение. Первое решение. Пусть $N \leqslant 101$. Распилим палку на $N - 1$ палочки длиной 1 см и одну палочку длиной $201 - N$ см. Из полученного набора невозможно сложить прямоугольник, так как каждая из сторон прямоугольника меньше полупериметра и, следовательно, палочка длиной $201 - N \geqslant \geqslant 100$ см не может быть частью никакой стороны. Таким образом, $N \geqslant 102$.

Покажем, что при $N = 102$ искомый прямоугольник найдется. Для этого заметим, что среди всех палочек найдутся две длиной по 1 см. В самом деле, если бы это было не так, то суммарная длина палочек была бы не меньше $2 \cdot 101 + 1 = 203$ см, что неверно.

Отложим эти две палочки. Пусть длины оставшихся палочек равны $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ см, тогда имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = = 198$. Среди 100 чисел $A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + + a_3, \ldots, A_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$ найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 99. Пусть это A_k и A_ℓ, $k < \ell$. Число $A_\ell - A_k$ строго больше нуля и строго меньше 198, при этом оно делится на 99. Значит, $A_\ell - A_k = 99 = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_\ell$.

Тем самым, мы нашли несколько палочек суммарной длины 99 см. Отложим и их. Оставшиеся палочки также имеют суммарную длину 99 см. Таким образом, нам удастся сложить прямоугольник 1×99 см.

Второе решение. Предъявим другое доказательство того, что при $N = 102$ сложить прямоугольник удастся.

Обозначим длины палочек набора, выраженные в сантиметрах, через $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{102} = 200$. Рассмотрим окружность длины 200 и разобьём её 102 красными точками на дуги длины $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Эти точки являются некоторыми 102 вершинами правильного 200-угольника T, вписанного в эту окружность. Вершины T разбиваются на пары противоположных. Таких пар 100, а красных точек — 102, значит, среди красных точек найдутся две пары противоположных.

Эти две пары точек делят окружность на две пары равных дуг. Таким образом, мы разбили все палочки на четыре группы A, B, C, D, причём суммарные длины в группах A и C, а также в группах B и D равны. Значит, можно составить прямоугольник, используя каждую группу для составления одной его стороны.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что $N \geqslant 102$ — 1 балл.

Доказано, что $N = 102$ подходит, но не обоснована его минимальность — 5 баллов.