11 класс

Задача 1. Трифилярный маятник

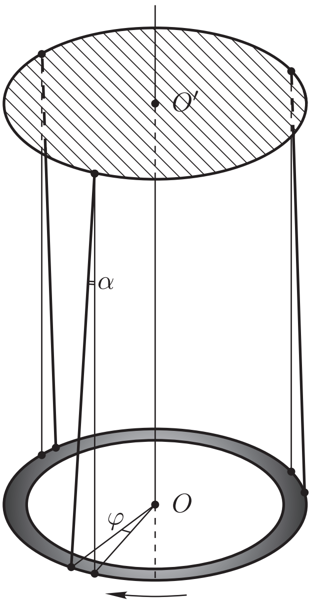

Рис. 22

1. Повернём кольцо относительно оси OO' на малый угол φ (рис. 22). Тогда все нити отклонятся на некоторый малый угол α. Из рисунка следует:

$$L \cdot \alpha = R \cdot \varphi, \text{ где } R \text{ — радиус кольца.}$$

При этом кольцо поднимется на

$$x = L(1 - \cos\alpha) \approx L\frac{\alpha^2}{2} = \frac{R^2}{2L}\varphi^2.$$

Допустим, что в этом положении все точки кольца имеют скорость $v = R\dot{\varphi}$. Тогда полная энергия кольца запишется в виде

$$E = Mgx + \frac{Mv^2}{2} = M\left(\frac{R^2 g}{2L}\varphi^2 + \frac{R^2\dot{\varphi}^2}{2}\right). \qquad (28)$$

При колебаниях без трения полная энергия сохраняется. Продифференцировав (28) по времени, получим:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\cdot\varphi = 0.$$

Это уравнение свободных колбаний. По аналогии с математическим маятником можно записать $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ — эта формула в точности совпадает с выражением для круговой частоты математического маятника длины L.

Окончательно находим:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

2. При наличии точечной массы в центре кольца выражение для кинетической энергии системы не изменяется, а в выражение для потенциальной энергии должна теперь входить сумма масс $(M + m)$. Уравнение для крутильных колебаний примет вид:

$$\ddot{\varphi} + \frac{(M+m)}{m}\frac{g}{L}\cdot\varphi = 0, \qquad \text{следовательно} \qquad \omega_0' = \sqrt{\frac{(M+m)}{M}\frac{g}{L}}.$$

При $m = M$ частота колебаний возрастёт в $\sqrt{2}$ раз, и, соответственно, период уменьшится в том же отношении.

Критерии оценивания

Записано соотношение между углом поворота кольца φ и углом отклонения нитей α от вертикали 1
Записано соотношение между высотой x подъёма кольца и углом φ его поворота 1
Записан закон сохранения энергии 2
Получено дифференциальное уравнение малых колебаний кольца 2
Найден период малых колебаний кольца 1
Указано, каким образом изменяются уравнения движения при добавлении точечной массы в центр кольца 1
Найдена циклическая частота колебаний для этого случая 1
Определено, во сколько раз изменился период колебаний 1

Задача 2. Заряженная частица в соленоиде

1. Магнитная индукция B в соленоиде определяется соотношением

$$B = \mu_0 I \cdot n = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 500 = 6{,}28 \cdot 10^{-4}\,\text{Тл}.$$

Направление вектора индукции можно найти по правилу буравчика. В данном случае вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка от читателя.

На движущуюся заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца, направление которой можно найти по правилу левой руки. Так как частица отклоняется вправо, её заряд $q < 0$.

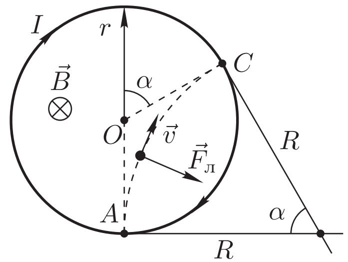

Рис. 23

2. В однородном магнитном поле заряженная частица движется по дуге окружности (рис. 23). При этом модуль вектора скорости остаётся неизменным:

$$\frac{mv^2}{R} = |q|Bv, \qquad \text{или} \qquad R = R_{\text{кривизны}} = \frac{mv}{|q|B}.$$

Радиус кривизны можно определить из геометрических соображений. Точки A и C находятся на пересечении двух окружностей радиусов r и R. Из соображений симметрии следует, что в точке C, также как и в точке A, вектор скорости частицы будет направлен вдоль радиуса витков катушки. Отсюда следует, что центр окружности, по которой движется частица (центр кривизны траектории), лежит на пересечении касательных в точках A и C.

Из рисунка следует:

$$R = r\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3}r = 17{,}3\,\text{см}.$$

3. Модуль скорости частицы v определим из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = |q|U; \qquad v^2 = \frac{2|q|U}{m} = \left(\frac{|q|}{m}\right)^2 R^2B^2\,.$$

Отсюда:

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2U}{R^2B^2} = \frac{2 \cdot 10^3}{(17{,}3)^2 \cdot 10^{-4} \cdot (6{,}28)^2 \cdot 10^{-8}} \approx 1{,}7 \cdot 10^{11}\,\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Примечание: Для электрона $\dfrac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}\,\dfrac{\text{Кл}}{\text{кг}}$.

Критерии оценивания

Найдена магнитная индукция B в соленоиде 1
Указано, какой знак заряда имеет частица 2
Записано уравнение Ньютона для врыщательного движения 2
Определён радиус кривизны траектории частицы внутри соленоида 1
Записан закон сохранения энергии для процесса ускорения электрона 2
Найден удельный заряд частицы 2

Задача 3. Устойчивость поршня

1. Пусть площадь сечения нижнего цилиндра — S. Тогда объём, занимаемый гелием, равен $V = (L - h)\,S$. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \nu RT \Rightarrow p\,(L - h)\,S = \nu RT. \tag{29}$$

Так как температура $T = const$ и площадь $S = const$, то $p\,(L - h) = const$. Отсюда следует, что другие положения равновесия можно найти из уравнения:

$$p_1\,(L - h_1) = p_2\,(L - h_2)\,,$$

где $p_1 = p_0 + \rho_\text{р} g h_1$, а $p_2 = p_0 + \rho_\text{р} g h_2$.

$$(p_0 + \rho_\text{р} g h_1)\,(L - h_1) = (p_0 + \rho_\text{р} g h_2)\,(L - h_2)\,. \tag{30}$$

Решая это квадратное уравнение, найдём $h_2 = 360$ мм.

2. Исследуем положения равновесия на устойчивость. Для этого сравним производные давления под поршнем ($p_{\text{снизу}}$) и над поршнем ($p_{\text{сверху}}$) по h. Устойчивое равновесие будет наблюдаться, если:

$$\frac{dp_{\text{снизу}}}{dh} > \frac{dp_{\text{сверху}}}{dh}. \tag{31}$$

$p_{\text{сверху}} = p_0 + \rho_{\text{р}} gh$, следовательно: $\dfrac{dp_{\text{сверху}}}{dh} = \rho_{\text{р}} g$.

$p_{\text{снизу}}(L-h) = const$, следовательно: $\dfrac{dp_{\text{снизу}}}{dh}(L-h) - p_{\text{снизу}} = 0$.

Следовательно:

$$\frac{dp_{\text{снизу}}}{dh} = \frac{p_{\text{снизу}}}{(L-h)}.$$

Подставим полученные производные в формулу (31):

$$\frac{p_{\text{снизу}}}{(L-h)} > \rho_{\text{р}} g.$$

$$\frac{p_0 + \rho_{\text{р}} gh}{(L-h)} > \rho_{\text{р}} g. \tag{32}$$

Тогда устойчивое равновесие будет наблюдаться при:

$$L < \frac{p_0}{\rho_{\text{р}} g} + 2h. \tag{33}$$

Для $h_1 = 380$ мм получаем: $L < 1.52$ м, то есть равновесие устойчивое, а для $h_2 = 360$ мм — $L < 1.48$ м, то есть равновесие неустойчивое.

Критерии оценивания

Получена связь между давлением под поршнем и высотой h 2

Найдено второе положение равновесия h_2 2

Получен критерий устойчивости положения равновесия (формула (5)) 4

Указана устойчивость верхнего положения равновесия 1

Указана устойчивость нижнего положения равновесия 1

Задача 4. Конденсатор с утечкой

1. В установившемся режиме сила тока $I = const$ при любом значении x. Выделим в среде слой x, dx. По закону Ома

$$dU = \rho \frac{dx}{S} I = I\rho_0 \left(1 + \frac{2x}{d}\right) \frac{dx}{S}. \tag{34}$$

Здесь S — площадь пластин конденсатора.

$$U_0 = \int dU = \frac{2I\rho_0 d}{S} = \frac{2I\rho_0\varepsilon_0}{C_0}, \text{ так как } C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Отсюда следует:

$$I = \frac{U_0 C_0}{2\rho_0\varepsilon_0}. \tag{35}$$

2. Определим напряжённость электрического поля вблизи нижней (E_1) и верхней (E_2) пластин. Из (34) и (35) следует:

$$E(x) = \frac{dU}{dx} = \frac{I\rho_0}{S}\left(1 + \frac{2x}{d}\right) = \frac{C_0 U_0}{2\varepsilon_0 S}\left(1 + \frac{2x}{d}\right). \tag{36}$$

При $x = 0$, $E_1 = \dfrac{C_0 U_0}{2\varepsilon_0 S}$,

$$q_1 = S\sigma_1 = SE_1\varepsilon_0 = \frac{C_0 U_0}{2}. \tag{37}$$

При $x = d$, $E_2 = \dfrac{3C_0 U_0}{2\varepsilon_0 S}$,

$$q_2 = -S\sigma_2 = -SE_2\varepsilon_0 = -\frac{3C_0 U_0}{2}. \tag{38}$$

3. Полный заряд конденсатора, включающий заряды обеих пластин и заряд в среде между пластинами, равен нулю:

$$q_1 + q_2 + q = 0.$$

Из этого соотношения следует:

$$q = C_0 U_0\,. \tag{39}$$

4. Электрическую энергию, запасённую в конденсаторе, найдём через объёмную плотность энергии $w_э = \varepsilon_0 E^2/2$:

$$W_э = \int w_э dV = \int_0^d \frac{\varepsilon_0 E^2(x)}{2} S dx = \frac{C_0 U_0^2}{8d}\int_0^d \left(1 + \frac{2x}{d}\right)^2 dx = \frac{13}{24} C_0 U_0^2.$$

Критерии оценивания

Записано выражение для падения напряжения dU в слое толщиной dx 1
Записано выражение для полного напряжения на конденсаторе 1
Записано выражение для силы тока 1
Найдена зависимость напряжённости электрического поля
от координаты $E(x)$ 1
Выведено выражение для заряда нижней плсатины 1
Выведено выражение для заряда верхней пластины 1
Найдено выражение для суммы зарядов 1
Выведено выражение для заряда между обкладками конденсатора 1
Получено выражение для энергии конденсатора
через объёмную плотность энергии 1
Определена величина энергии конденсатора 1

Задача 5. Плоский световод

Рассмотрим преломление лучей от источника на левом торце пластинки (рис. 24). Максимальный угол β_{max} преломления на левом торце соответствует углу падения $\alpha = 90°$:

$$\sin\beta_{max} = \frac{1}{n}\,.$$

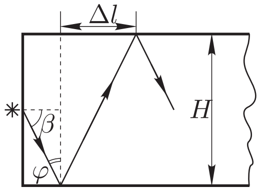

Рис. 24

Минимальный угол падения на боковую грань

$$\varphi_{min} = 90° - \beta_{max}.$$

Ход лучей в пластине будет зависеть от соотношения между φ_{min} и $\varphi_{\text{пред}}$ (предельный угол полного отражения).

Случай 1 $\varphi_{min} \geqslant \varphi_{\text{пред}}$, или $\sin\varphi_{min} \geqslant \sin\varphi_{\text{пред}} = \frac{1}{n}$.

В этом случае все лучи, падающие на боковые грани пластины, будут испытывать полное отражение и, следовательно, ни один луч не выйдет из пластины.

$$\sin\varphi_{min} = \cos\beta_{max} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \geqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \sqrt{n^2-1} \geqslant 1 \Rightarrow n \geqslant \sqrt{2}.$$

Минимальное расстояние (Δl) между соседними отражениями лучей на противоположных гранях:

$$(\Delta l)_{min} = H\operatorname{tg}\varphi_{min} = H\frac{\cos\beta_{max}}{\sin\beta_{max}} = H\frac{1/n\sqrt{n^2-1}}{1/n} = H\sqrt{n^2-1}.$$

Максимальное число отражений $N_1 = (N_1)_{max}$:

$$N_1 = \left[\frac{L}{(\Delta l)_{min}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{L}{H}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{2}\right].$$

Слагаемое $1/2$ возникает из-за того, что перед первым отражением луч проходит вдоль трубы расстояние $\Delta l/2$.

При $n = n_1 = 1{,}73$ $N_1 = 71$.

Случай 2 $\varphi_{min} \leqslant \varphi_{\text{пред}}$, или $\sin\varphi_{min} \leqslant \sin\varphi_{\text{пред}} = \dfrac{1}{n}$; $\dfrac{1}{n}\sqrt{n^2-1} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

В этом случае

$$(\Delta l)_{min} = H\operatorname{tg}\varphi_{\text{пред}} = \frac{H}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Часть лучей, падающих на боковую грань под углами от φ_{min} до $\varphi_{\text{пред}}$, будут испытывать только частичное отражение и не дойдут до правого торца пластины.

Максимальное число отражений $N_2 = (N_2)_{max}$:

$$N_2 = \left[\frac{L}{(\Delta l)_{min}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{L}{H}\sqrt{n^2-1} + \frac{1}{2}\right],$$

при $n = n_2 = 1{,}3$, $N_2 = 100 \cdot 0{,}83 = 83$.

Критерии оценивания

Записано выражение для угла полного отражения 1
Указано, в каком из случаев свет частично выходит
из пластины через боковые грани 2
Определено, какой луч отразится максимальное количество раз
в первом случае 1
Определено, какой луч отразится максимальное количество раз
во втором случае 1
Получена формула для $(\Delta l)_{min}$ в первом случае 1
Получена формула для $(\Delta l)_{min}$ во втором случае 1
Найден ответ для N_{max} в первом случае 2
Найден ответ для N_{max} во втором случае 1

Магазин «Физтех-книга»