Решения задач

9 класс

9.5. **Ответ.** Могло.

Пусть в нашем наборе a, b и c чисел, дающих соответственно остатки 0, 1 и 2 при делении на 3. Тогда условие переписывается в виде $\frac{a(a-1)}{2}+bc=\frac{b(b-1)}{2}+ac=\frac{c(c-1)}{2}+ab$, $a+b+c=2011$. Несложно видеть, что этим условиям удовлетворяет, например, набор чисел $a=c=670$, $b=671$, ибо $\frac{671\cdot 670}{2}+670^2=\frac{670\cdot 669}{2}+$ $+670+670^2=\frac{670\cdot 669}{2}+670\cdot 671$.

Замечание. В качестве примера можно привести, например, числа от 1 до 2011.

Нетрудно и полностью решить приведённую систему. Первое уравнение переписывается в виде $(a-b)(a+b-1-2c)=0$ или, с учётом равенства $a+b+c=2011$, $(a-b)(2010-3c)=0$. Итак, либо $a=b$, либо $c=670$. С учётом других аналогичных равенств получаем, что все решения имеют вид $(670,670,671)$, $(670,671,670)$ и $(671,670,670)$.

9.6. **Ответ.** $\frac{14}{5}$.

Первое решение. Будем рядом с каждой парой писать какой-нибудь квадратный трёхчлен, корнями которого являются числа этой пары. Пусть в некоторый момент у мальчиков записаны трёхчлены $p(x)$ и $q(x)$. Тогда они решали уравнение вида $\alpha p(x)=\beta q(x)$, где α,β — какие-то ненулевые числа. Значит, полученные числа — корни трёхчлена $\alpha p(x)-\beta q(x)$. Если теперь один из мальчиков заменяет свои числа на эти корни, то можно считать, что рядом с ними будет записан трёхчлен $\alpha p(x)-\beta q(x)$.

Обозначим исходные два трёхчлена $p_0(x)=(x-1)(x-2)$ и $q_0(x)=(x-3)(x-4)$. Из сказанного выше теперь следует, что на каждом шаге у каждого мальчика написан трёхчлен вида $\alpha p_0(x)+\beta q_0(x)$.

Итак, если на Петином листке написано число 5, то у него записан трёхчлен $a(x-5)(x-x_2)=\alpha(x-1)(x-2)+\beta(x-3)(x-4)$.

Подставляя $x = 5$, получаем $12\alpha + 2\beta = 0$, откуда $\alpha(x-1)(x-2)+\beta(x-3)(x-4) = \alpha(-5x^2+39x-70) = -\alpha(x-5)(5x-14)$. Значит, второе число равно $x_2 = \frac{14}{5}$.

Второе решение. Будем вычитать из каждого из чисел в тетрадях по $\frac{5}{2}$. Иначе говоря, мы вводим новую переменную $t = x - \frac{5}{2}$. Тогда первоначальные числа в тетрадях станут равны $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ у Пети и $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ у Васи, а трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ заменятся на некоторые трёхчлены $F(t)$ и $G(t)$.

Покажем, что теперь произведение пары чисел в любой тетради будет всегда равно $\frac{3}{4}$. Это выполнено в начальный момент времени. Пусть это верно перед очередной заменой. Согласно теореме Виета, имеем $F(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1$, где $\frac{c_1}{a_1} = \frac{3}{4}$, и $G(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2$, где $\frac{c_2}{a_2} = \frac{3}{4}$. Новая пара чисел t_1 и t_2 — это пара корней уравнения $F(t) = G(t)$, то есть $(a_1 - a_2)t^2 + (b_1 - b_2)t + (c_1 - c_2) = 0$. Опять по теореме Виета получаем

$$t_1t_2 = \frac{c_1 - c_2}{a_1 - a_2} = \frac{\frac{3}{4}a_1 - \frac{3}{4}a_2}{a_1 - a_2} = \frac{3}{4},$$

что и требовалось доказать.

Итак, если в некоторый момент одно из Петиных чисел равно $t_1 = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$, то второе есть $t_2 = \frac{3}{4} : \frac{5}{2} = \frac{3}{10}$, откуда $x_2 = \frac{3}{10} + \frac{5}{2} = \frac{14}{5}$.

Замечание. Описанную ситуацию можно получить даже за один ход, если, например, Петя запишет трёхчлен $x^2 - 3x + 2$, а Вася — трёхчлен $6x^2 - 42x + 72$.

9.7. **Первое решение.** Пусть ℓ — касательная к описанной окружности в точке B, а P и Q — точки пересечения ℓ с лучами TM и TN соответственно. Обозначим через K и L соответственно точки, в которых лучи TM и TN пересекают стороны треугольника (см. рис. 1).

Заметим, что четырёхугольники $ABQT$ и $BCTP$ — параллелограммы, откуда $AT = BQ$, $CT = BP$. Далее, из параллельности имеем $\angle KPB = \angle PBK = \angle LTC = 60^\circ$, то есть треугольники BPK и CLT — равносторонние. Поскольку $BP = CT$, эти

треугольники равны. Далее, из вписанности имеем $\angle KBM = \angle ABM = \angle ACM = \angle TCY$; значит, точки M и Y — соответственные в этих треугольниках, откуда $BM = CY$ и $PM = LY$. Аналогично, $BN = AX$ и $QN = KX$.

Итак, имеем $XM + YN = KX + KM + LY + LN = QN + KM + PM + LN = QL + KP$. Но $QL = BQ = AT$, а $KP = BP = CT$. Значит, $XM + YN = AT + CT = AC$.

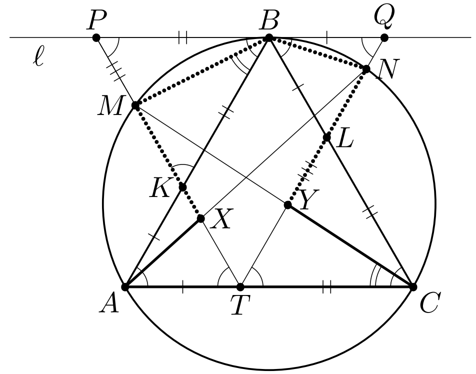

Рис. 1

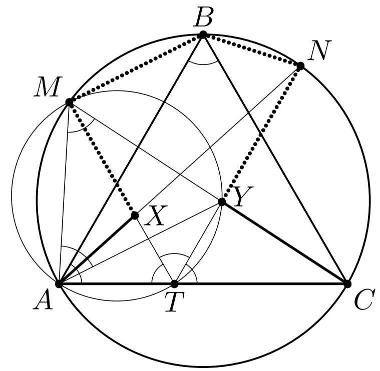

Рис. 2

Итого, получаем $P_{XMBNY} = (XM + YN) + BM + BN + XY = AC + CY + AX + XY = P_{AXYC}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Докажем следующую известную лемму.

Лемма. *Пусть PQR — правильный треугольник, и на меньшей дуге PR его описанной окружности выбрана точка W. Тогда $PW + RW = QW$.*

Доказательство. Отметим на отрезке QW точку V такую, что $VW = WR$ (см. рис. 3). Имеем $\angle VWR = \angle QPR = 60^\circ$, значит, треугольник RVW — правильный. Далее, $RQ = RP$, $RV = RW$ и $\angle PRW = 60^\circ - \angle VRP = \angle QRV$, значит, треугольники RVQ и RWP равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $QV = PW$ и $QW = QV + VW = PW + RW$. Лемма доказана. □

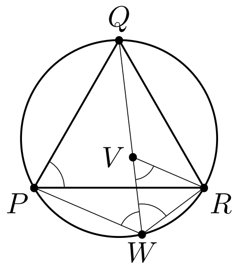

Рис. 3

Перейдём к решению задачи. Из параллельности имеем $\angle ATX = \angle XTY = \angle CTY = 60^\circ$. Кроме того, $\angle AMY = \angle ABC = 60^\circ$. Тогда $\angle AMY + \angle ATY = 180^\circ$, значит, точки A, M, Y, T лежат на одной окружности (см. рис. 2).

Далее, $\angle MAY = \angle MTY = 60^\circ$, значит, треугольник MAY — правильный (два из его углов равны по 60°), T — точка на дуге AY его описанной окружности. Тогда по лемме $AT + TY = MX + TX$. Аналогично, $CT + TX = NY + TY$. Складывая эти два равенства, получаем $AC = AT + TC = MX + NY$.

Для треугольника ABC и точки M по лемме получаем $AM + MB = MY + YC$; поскольку $AM = MY$, получаем $CY = MB$. Аналогично, $AX = BN$.

В итоге, $P_{AXYC} = AC + AX + CY + XY = (MX + NY) + BN + BM + XY = P_{XMBNY}$, что и требовалось доказать.

9.8. **Ответ.** Не может.

Лемма. *Для любой клетки доски X существует множество S, состоящее из чётного количество клеток и содержащее X, такое, что у каждой клетки доски чётное число соседей лежит в S.*

Доказательство. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке; можно считать, что X — чёрная. Для начала рассмотрим одну из диагоналей, проходящих через X; пусть A и B — центры двух крайних клеток этой диагонали, а C и D — точки, симметричные им относительно центра доски. Тогда обозначим через S множество всех чёрных клеток, центры которых лежат внутри или на границе прямоугольника $ABCD$. На рис. 4 показаны возможные виды множества S на доске 8×8 (прямоугольники $ABCD$ обозначены пунктиром).

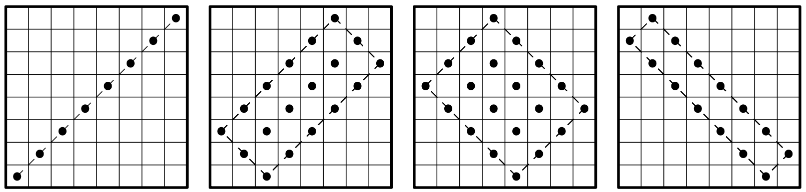

Рис. 4

Множество S состоит из чётного числа клеток, поскольку

количества центров клеток на сторонах AB и AD имеют разную чётность. Далее, чёрные клетки не имеют соседей в S, каждая белая клетка внутри $ABCD$ граничит с четырьмя клетками из S, а каждая белая клетка вне него — либо с нулём, либо с двумя клетками из S. Итак, множество S удовлетворяет всем условиям. □

Перейдём к решению задачи. Предположим, что существует ровно одна красивая клетка X. Рассмотрим для этой клетки множество S из леммы. Для каждой клетки этого множества посчитаем количество фишек в соседних с ней клетках; пусть g — сумма всех этих количеств. С одной стороны, в S чётное число клеток, из которых ровно одна красива, а все остальные — нет; поэтому сумма g нечётна. С другой стороны, каждая клетка с фишкой имеет чётное число соседей в S, поэтому она даёт чётный вклад в g; значит, и g должна быть чётной. Противоречие.